例外型単純リー群

横田 一郎 著

現代数学社

例外型単純リー群

横　田　一　郎 著

現代数学社

まえがき

私は先に「古典型単純リー群」の書を出しましたが，この度その続編として「例外型単純リー群」の書を出すことになりました．私が例外 Lie 群に興味を持ってからは久しく，その始まりは40年前の大学卒以来といえるかもしれません．しかし本格的にやり始めたのは20年程前からです．まだまだ未完でやり残した所が多くありますが，私の定年退官が近くなりましたので，例外 Lie 群をまとめて出版したいと思っていました．この希望をかなえて下さったのが現代数学社であり，同社の皆様に感謝しています．

本書で例外 Lie 群について私の知るすべてを書きたいと思いましたが，紙数の関係もあり，単連結 compact 例外 Lie 群に限ることにしました．その代りできるだけ詳しく丁寧に解説しました．したがって自明と思えるものにまで証明を与えているかもしれません．すなわち一般論から容易に導ける個所にも直接的な証明を与えています．直接証明は時には何かの役に立つかもしれませんし，またその直接証明に「味」があるような気がするからです．しかし直接証明を与えることができないときには一般論に頼っており，必ずしも統一されておりません．

本書の内容をもう少し詳しくいいますと、単連結 compact 例外 Lie 群 $G = G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ の構成，その対合自己同型写像 σ の実現と不動点部分群 G^σ の決定です．最近，例外 Lie 群が，特に群 E_6，E_8 が物理学に利用されているとききます．本書が数学，物理学に少しでも役立つことがあるように願っています．

1990年 8 月20日　　横田一郎

記　　号

本書の記号は「古典型単純リー群」にあるものをそのまま用いることにしました．それでも 2，3 注意しておきます．

V を体 K 上ベクトル空間とする．

K-線型写像 f：$V\to V$ に対し，$V_f=\{v\in V|f(v)=v\}$ とする．

$\mathrm{Iso}_K(V)$ は K-同型写像 α：$V\to V$ 全体のつくる群とする．

$\mathrm{Hom}_K(V)$ は K-線型写像 ϕ：$V\to V$ 全体のつくる K-ベクトル空間（または K-多元環）とする．

G を群とする．自己同型写像 σ：$G\to G$ に対し，$G^\sigma=\{g\in G\,|\,\sigma(g)=g\}$ とする．$s\in G$ に対し，s により誘導される G の内部自己同型写像を $\tilde{s}$ で表す：$\tilde{s}(g)=sgs^{-1}$, $g\in G$．この $\tilde{s}$ を略して s で表す：$G^s=\{g\in G\,|\,sg=gs\}$

2 つの群 G, G' が同型である：$G\cong G'$ とき，G と G' をしばしば同一視する：$G=G'$．

次の書は本書に関係があり，引用した箇所もあるので参考にして下さい．

〔1〕　横田一郎，群と位相，裳華房，1971．

〔2〕　横田一郎，群と表現，裳華房，1973．

〔3〕　横田一郎，古典型単純リー群，現代数学社，1990．

次の定理を証明なしに用いた箇所があります．（しかし，これを用いない証明も可能な限り与えておきました）．

定理（E. Cartan - P. K. Raševskii）　G を単連結な Lie 群，σ：$G\to G$ を位数有限の同型写像とするとき，G^σ は連結である．

目　　次

I　例外型単純 Lie 群 G_2

II　例外型単純 Lie 群 F_4

III　例外型単純 Lie 群 E_6

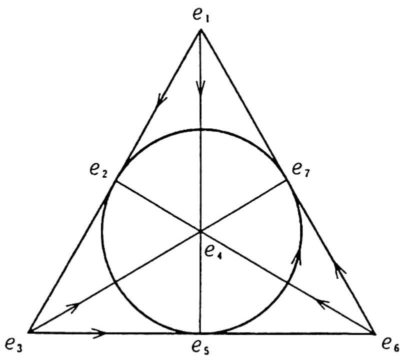
IV　例外型単純 Lie 群 $\boldsymbol{E}_7$

V　例外型単純 Lie 群 $\boldsymbol{E}_8$

I．例外型単純 Lie 群 G_2

1　Cayley 代数 $\mathfrak{C}$

$\mathfrak{C}$ で **Cayley 代数**（**八元数体**または **division Cayley 代数**ともいう）を表す．この Cayley 代数を説明しよう．$e_0=1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ を基とする 8 次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間を $\mathfrak{C}$ とし，その元を **Cayley 数**という．$\mathfrak{C}$ の基の間に積を次のように定義する．下図において，左の線上の e_1，e_2，e_3 の間では，$e_1e_2=e_3$，$e_2e_3=e_1$，$e_3e_1=e_2$ と定義する．他の 6 本の線上でも同様に積を定義する．



例えば $e_5e_7=e_2$ のようである．$e_0=1$ を積の単位元とし，かつ

$$e_i{}^2=-1,\quad i\neq 0,\qquad e_ie_j=-e_je_i,\quad i\neq 0,\quad j\neq 0,\quad i\neq j$$

とし，さらに分配法則が成り立つとすると，$\mathfrak{C}$ に積が定義される．$\mathfrak{C}$ の元 $x=x_0+\sum_{i=1}^{7}x_ie_i$ に対して，**共役元** $\overline{x}$，**実部** $\mathrm{R}(x)$ をそれぞれ

$$\overline{x}=\overline{x_0+\sum_{i=1}^{7}x_ie_i}=x_0-\sum_{i=1}^{7}x_ie_i,\quad \mathrm{R}(x)=x_0$$

で定義し，また $x, y\in\mathfrak{C}$ の**内積** (x, y) および $x\in\mathfrak{C}$ の**長さ** $|x|$ をそれぞれ

$$(x, y)=\left(\sum_{i=0}^{7}x_ie_i, \sum_{i=0}^{7}y_ie_i\right)=\sum_{i=0}^{7}x_iy_i, \quad |x|=\sqrt{(x, x)}$$

で定義する．0 でない Cayley 数 x に対して $\dfrac{\overline{x}}{|x|^2}$ を x^{-1} とおくと $xx^{-1}=x^{-1}x=1$ が成り立つ．そして体の定義のうち結合法則 $x(yz)=(xy)z$ を除いた法則をすべて満たしている．もちろん可換法則 $xy=yx$ は成り立たない．結合法則が成り立たないが，それに代わるものとして次の諸公式が成り立つ（証明は［1］，240頁）．$x, y, a, b\in\mathfrak{C}$ とする．

1 $(xy, xy)=(x, x)(y, y)$, $\quad(|xy|=|x||y|)$.

2 $(ax, ay)=(a, a)(x, y)=(xa, ya)$.

3 $(ax, by)+(bx, ay)=2(a, b)(x, y)$.

4 $(ax, y)=(x, \overline{a}y)$, $\quad(xa, y)=(x, y\overline{a})$.

5 $\overline{\overline{x}}=x$, $\quad\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$, $\quad\overline{xy}=\overline{y}\,\overline{x}$.

6 $(x, y)=(y, x)=\dfrac{1}{2}(\overline{x}y+\overline{y}x)=\dfrac{1}{2}(x\overline{y}+y\overline{x})$, $\quad(x\overline{x}=\overline{x}x=|x|^2)$.

7 $a(\overline{a}x)=(a\overline{a})x$, $\quad a(x\overline{a})=(ax)\overline{a}$, $\quad x(a\overline{a})=(xa)\overline{a}$,
$a(ax)=(aa)x$, $\quad a(xa)=(ax)a$, $\quad x(aa)=(xa)a$.

8 $\overline{b}(ax)+\overline{a}(bx)=2(a, b)x=(xa)\overline{b}+(xb)\overline{a}$.

9 $a, b, c\in\mathfrak{C}$ に対して $\{a, b, c\}=(ab)c-a(bc)$ とおくとき

$$\{a, b, c\}=\{b, c, a\}=\{c, a, b\}=-\{a, c, b\}=-\{c, b, a\}=-\{b, c, a\}$$

が成り立つ．すなわち

$$(ax)y+x(ya)=a(xy)+(xy)a,$$
$$(xa)y+(xy)a=x(ay)+x(ya),$$
$$(ax)y+(xa)y=a(xy)+x(ay)$$

が成り立つ．

10 $(ax)(ya)=a(xy)a$ （**Moufang の公式**）．

11 $\mathrm{R}(xy)=\mathrm{R}(yx)$, $\quad\mathrm{R}(x(yz))=\mathrm{R}(y(zx))=\mathrm{R}(z(xy))$.

$1, a_1, a_2, \cdots, a_7$ を $\mathfrak{C}$ の内積 (x, y) に関する $\boldsymbol{R}$-正規直交基とするとき

12.1 $a_i(a_jx)=-a_j(a_ix)$, 特に $a_ia_j=-a_ja_i$, $i\neq j$

12.2 $a_i(a_ix)=-x$, 特に $a_i^2=-1$

12.3 $a_i(a_ja_k)=a_j(a_ka_i)=a_k(a_ia_j)$, $\quad i, j, k$ は異なる

が成り立つ．

2　compact 例外群 G_2

定義　Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ の自己同型群を G_2 で表す：

$$G_2=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C})\,|\,\alpha(xy)=(\alpha x)(\alpha y)\}.$$

定理1.1　$\alpha\in G_2$ は $\mathfrak{C}$ の内積 (x,y) を不変にする：

$$(\alpha x,\alpha y)=(x,y),\qquad x,y\in\mathfrak{C}.$$

特に G_2 は compact Lie 群である．

証明　まず $\alpha\in G_2$ は

$$\overline{\alpha x}=\alpha\overline{x},\qquad x\in\mathfrak{C}$$

を満たすことを示そう．そのためには

$$\alpha 1=1,\quad \overline{\alpha e_i}=-\alpha e_i,\quad i=1,2,\cdots,7$$

を示せば十分である．さて，$(\alpha 1)(\alpha 1)=\alpha(1\cdot 1)=\alpha 1$, $\alpha 1\neq 0$ より $\alpha 1=1$ を得る．$i\neq 0$ のとき，$(\alpha e_i)(\alpha e_i)=\alpha(e_ie_i)=\alpha(-1)=-\alpha 1=-1$ より $\overline{\alpha e_i}=-\alpha e_i$ を得る．（一般に $a\in\mathfrak{C}$ が $aa=-1$ であるとき，両辺の長さをとると $|a|=1$ となる．$aa=-1$ の左から $\overline{a}$ を掛けて $|a|^2a=-\overline{a}$ より $a=-\overline{a}$ を得る）．さて

$$\begin{aligned}2(\alpha x,\alpha y)&=(\alpha x)\overline{(\alpha y)}+(\alpha y)\overline{(\alpha x)}=(\alpha x)(\alpha\overline{y})+(\alpha y)(\alpha\overline{x})\\&=\alpha(x\overline{y}+y\overline{x})=2\alpha((x,y))=2(x,y)\end{aligned}$$

である．よって，G_2 は直交群 $O(8)=O(\mathfrak{C})=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C})\,|\,(\alpha x,\alpha y)=(x,y)\}$ の閉部分群として compact Lie 群である：$G_2\subset O(8)$．（さらに G_2 は直交群 $O(7)=\{\alpha\in O(\mathfrak{C})\,|\,\alpha 1=1\}$ の部分群である：$G_2\subset O(7)$）．

3　G_2 の部分群 $SU(3)$

複素数体 $\boldsymbol{C}$ は Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ に

$$\boldsymbol{C}=\{x+ye_4\,|\,x,y\in\boldsymbol{R}\}$$

として含まれていると考える：$\boldsymbol{C}\subset\mathfrak{C}$．以下，$e_4$ を単に e と書くことにする．任意の $x\in\mathfrak{C}$ は

$$\begin{aligned}x&=x_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4+x_5e_5+x_6e_6+x_7e_7\qquad x_i\in\boldsymbol{R}\\&=(x_0+x_4e)+(x_1-x_5e)e_1+(x_2+x_6e)e_2+(x_3-x_7e)e_3\end{aligned}$$

すなわち

$$x=a+m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3,\qquad a,m_i\in\boldsymbol{C}$$

と一意に表せる．この x を $\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3$ の元

$$a+\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

に対応させる．さて，$\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3$ に積，内積，共役元をそれぞれ

$$(a+\boldsymbol{m})(b+\boldsymbol{n})=(ab-\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle)+(a\boldsymbol{n}+\overline{b}\boldsymbol{m})+(\overline{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}),$$

$$(a+\boldsymbol{m},b+\boldsymbol{n})=(a,b)+\frac{1}{2}(\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle+\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle),$$

$$\overline{a+\boldsymbol{m}}=\overline{a}-\boldsymbol{m}$$

で定義する．ここに，$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$，$\langle\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\rangle$ はそれぞれ $\boldsymbol{C}^3$ における通常の外積，Hermite 内積である．すなわち $\boldsymbol{m}=\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{C}^3$ に対し

$$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix} m_2n_3-n_2m_3 \\ m_3n_1-n_3m_1 \\ m_1n_2-n_1m_2 \end{pmatrix},\ \langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=m_1\overline{n}_1+m_2\overline{n}_2+m_3\overline{n}_3$$

で定義されている．$\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3$ の積が $\mathfrak{C}$ の積に対応していることは，$a,b,m,n\in\boldsymbol{C}$ に対し

$$a(ne_i)=(an)e_i,\qquad (me_i)b=(\overline{b}m)e_i,$$

$$(me_i)(ne_i)=-m\overline{n},\quad (me_1)(ne_2)=\overline{mn}e_3\quad 等$$

が成り立つことを示すとよいが，これらは実際の計算により確かめられる．内積，共役元についても同様である．以後 $\mathfrak{C}$ と $\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3$ を同一視することにする：$\mathfrak{C}=\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3$．

補題1.2　$A\in M(n,\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{C}^3$ に対し，次の (1), (2) が成り立つ．

(1)　$\langle A\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\rangle=\langle\boldsymbol{m},A^*\boldsymbol{n}\rangle$．

(2)　$A\boldsymbol{m}\times A\boldsymbol{n}={}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})$，ここに $\widetilde{A}\in M(3,\boldsymbol{C})$ は A の余因数行列である：$\widetilde{A}A=A\widetilde{A}=(\det A)E$．

G_2 の部分群 $(G_2)_e$ を

$$(G_2)_e=\{\alpha\in G_2\,|\,\alpha e=e\}$$

で定義する．

定理1.3　$$(G_2)_e\cong SU(3).$$

証明　写像 $\varphi : SU(3) \to (G_2)_e$ を

$$\varphi(A)(a+\boldsymbol{m}) = a + A\boldsymbol{m}, \quad a+\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 = \mathfrak{C}$$

で定義する．そのために，まず $\varphi(A) \in (G_2)_e$ を示さなければならない．実際，$\alpha = \varphi(A)$，$A \in SU(3)$，$x = a+\boldsymbol{m}$，$y = b+\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3 = \mathfrak{C}$ に対し

$$\begin{aligned}(\alpha x)(\alpha y) &= (a+A\boldsymbol{m})(b+A\boldsymbol{n}) \\ &= (ab - \langle A\boldsymbol{m}, A\boldsymbol{n}\rangle) + (aA\boldsymbol{n} + \overline{b}A\boldsymbol{m} + \overline{A\boldsymbol{m} \times A\boldsymbol{n}}) \\ &= (ab - \langle \boldsymbol{m}, A^*A\boldsymbol{n}\rangle) + (aA\boldsymbol{n} + \overline{b}A\boldsymbol{m} + \overline{{}^t\widetilde{A}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})}) \quad (\text{補題1.2}) \\ &= (ab - \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle) + A(a\boldsymbol{n} + \overline{b}\boldsymbol{m} + \overline{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}})\end{aligned}$$

（$A \in SU(3)$ ならば $\widetilde{A} = A^{-1} = A^*$ である）

$$= \varphi(A)((a+\boldsymbol{m})(b+\boldsymbol{n})) = \alpha(xy)$$

となるから $\varphi(A) \in G_2$ である．さらに $\varphi(A)e = e$ となるから $\varphi(A) \in (G_2)_e$ である．明らかに φ は群準同型写像である．φ は全射である．実際，$\alpha \in (G_2)_e$ は $\boldsymbol{C}^3$ の $\boldsymbol{C}$-線型写像を誘導するので，$A \in M(3, \boldsymbol{C})$ が存在して

$$\alpha e_i = Ae_i, \quad i = 1, 2, 3$$

となる．$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$，$\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{C}^3$ とおくとき，$(\alpha e_1)(\alpha e_2) = \alpha(e_1 e_2) = \alpha(e_3)$ より，$\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3$，すなわち $-\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle + \overline{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2} = \boldsymbol{a}_3$ となるので

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle = 0, \quad \boldsymbol{a}_3 = \overline{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}$$

を得る．同様に $\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle = \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1\rangle = 0$ を得る．さらに，$(\alpha e_i)(\alpha e_i) = \alpha(e_i e_i) = \alpha(-1) = -1$ より $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i\rangle = 1$ となるので $A \in U(3)$ である．また $\det A = (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_3, \overline{\boldsymbol{a}}_3) = \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3\rangle = 1$ （ここに $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は普通の内積 $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i$ である $(\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3))$）より $A \in SU(3)$ であって，かつ $\varphi(A) = \alpha$ である．これでφ の全射が示された．$\operatorname{Ker} \varphi = \{E\}$ は容易である．よって Lie 群の同型 $SU(3) \cong (G_2)_e$ を得る．

定理1.4　$$G_2/SU(3) \simeq S^6.$$

証明　$S^6 = \{a \in \mathfrak{C} \mid \overline{a} = -a, |a| = 1\}$ とおくと，S^6 は 6 次元球面である．G_2 は $O(7)$ の部分群である（定理1.1）から，G_2 は S^6 に働く．この働き方が推移的であることを示そう．

$a_4 \in S^6$ を与える．

$a_1 \in S^6$ を $(a_1, a_4) = 0$ を満たす任意の元とする．

$a_5 = a_1 a_4$ とおくと，$a_5 \in S^6$ であって $(a_5, a_4) = (a_5, a_1) = 0$ を満たしている．

$a_2 \in S^6$ を $(a_2, a_4)=(a_2, a_1)=(a_2, a_5)=0$ を満たす任意の元とする．

$a_6=a_4a_2$, $a_3=a_1a_2$, $a_7=a_3a_4$ とおく．

このとき，$a_0=1, a_1, \cdots, a_7$ は $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基である．実際，$|a_i|=1$ は明らかであるが $(a_i, a_j)=0$, $i \neq j$ を確かめなければならない．確かめる回数は ${}_7C_2=21$ であるが，ここでは次の3つを例として示しておくことにとどめる．

$$(a_4, a_5)=(a_4, a_1a_4)=(1, a_1)(a_4, a_4)=0,$$
$$(a_1, a_6)=(a_1, a_4a_2)=-(a_4a_1, a_2)=(a_1a_4, a_2)=(a_5, a_2)=0,$$
$$(a_4, a_3)=(a_4, a_1a_2)=-(a_1a_4, a_2)=-(a_5, a_2)=0.$$

さて，$e_0=1, e_1, \cdots, e_7$; $a_0=1, a_1, \cdots, a_7$ は共に $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基であるから，$\boldsymbol{R}$-線型写像 $\alpha : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を

$$\alpha e_i = a_i, \qquad i=0, 1, \cdots, 7$$

を満たすようにつくると $\alpha \in O(7)$ である．さらに $\alpha \in G_2$, すなわち α は

$$\alpha(xy)=(\alpha x)(\alpha y), \qquad x, y \in \mathfrak{C}$$

を満たしている．実際，これを示すには

$$\alpha(e_ie_j)=(\alpha e_i)(\alpha e_j), \qquad i, j=0, 1, \cdots, 7$$

が成り立つことを確かめればよい．これも数多く確かめなければならないが，次の3つを例としてあげておくにとどめる．

$$(\alpha e_4)(\alpha e_5)=a_4a_5=a_4(a_1a_4)=-a_4(a_4a_1)=a_1=\alpha(e_1)=\alpha(e_4e_5),$$
$$(\alpha e_1)(\alpha e_6)=a_1a_6=a_1(a_4a_2)=-a_4(a_1a_2)=-a_4a_3=a_3a_4$$
$$=a_7=\alpha(e_7)=\alpha(e_1e_6),$$
$$(\alpha e_5)(\alpha e_6)=a_5a_6=(a_1a_4)(a_4a_2)=(a_4a_1)(a_2a_4)=a_4(a_1a_2)a_4$$
$$=a_4a_3a_4=-a_4a_4a_3=a_3=\alpha(e_3)=\alpha(e_5e_6).$$

よって $\alpha \in G_2$ であり，かつ $\alpha e=a_4$ である．以上で G_2 が S^6 に推移的に働くことが示された．$e \in S^6$ における G_2 の等方群は$SU(3)$ である（定理1.3）．よって同相 $G_2/SU(3) \simeq S^6$ を得る．

S^6, $SU(3)$ は共に単連結であり，それぞれ6，8次元多様体であるから，定理1.4より次の定理を得る．

定理1.5 G_2 は単連結 compact Lie 群で，その次元は14である．

G_2 は連結である（定理1.5）から，G_2 は $SO(7)=\{\alpha \in O(7) \mid \det \alpha=1\}$ に含まれる：$G_2 \subset SO(7)$.

4　$SO(8)$ における 3 対原理

以下，$SO(8)=SO(\mathfrak{C})=\{\alpha\in O(\mathfrak{C})\,|\det\alpha=1\}$ とおく．さて，元 $a\in S^7=\{a\in\mathfrak{C}\,|\,|a|=1\}$ に対し，$D_a\in O(8)=O(\mathfrak{C})$ を

$$D_a x=x-2(x,a)a,\quad x\in\mathfrak{C}$$

で定義し，D_a を a に直交する超平面に関する**反射写像**という．この行列式は -1 である：$\det D_a=-1$.

補題1.6　群 $O(8)$ は反射写像で生成される．すなわち，任意の $\alpha\in O(8)$ は有限個の反射写像の積で表せる：$\alpha=D_{a_m}\cdots D_{a_1}$，$a_i\in S^7$．特に，$\alpha\in SO(8)$ は偶数個の反射写像の積で表せる：$\alpha=D_{a_{2m}}\cdots D_{a_1}$，$a_i\in S^7$.

証明　([1]定理24).

定理1.7（$SO(8)$ **における 3 対原理**）　任意の $\alpha_3\in SO(8)$ に対して，$\alpha_1,\alpha_2\in SO(8)$ が存在し

$$(\alpha_1x)(\alpha_2y)=\alpha_3(xy),\quad x,y\in\mathfrak{C}$$

が成り立つ．かつ，このような α_1，α_2 は α_3 に対して α_1，α_2；$-\alpha_1$，$-\alpha_2$ の 2 通りに限る．

証明　α_3 は偶数個の反射写像の積で表せる（補題1.6）から，$\alpha_3=D_bD_a$，$a,b\in\mathfrak{C}$，$|a|=|b|=1$ のときに，α_1，α_2 の存在を示せばよい．さて

$$D_ax=x-2(x,a)a=x-(x\overline{a}+a\overline{x})a=-a\overline{x}a,\quad x\in\mathfrak{C}$$

であるから，$\alpha_3x=D_bD_ax=b(\overline{a}x\overline{a})b$ である．そこで $\alpha_1,\alpha_2:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ を $\alpha_1x=b(\overline{a}x)$，$\alpha_2x=(x\overline{a})b$ で定義すると，$\alpha_1,\alpha_2\in SO(8)$ であって

$$(\alpha_1x)(\alpha_2y)=(b(\overline{a}x))((y\overline{a})b)=b(\overline{a}(xy)\overline{a})b=\alpha_3(xy)$$

を得る．次に α_1，α_2 が α_3 に対して符号を除いて一意に定まることを示そう．そのためには，$\alpha_3=1$ のとき $\alpha_1=\alpha_2=\pm1$ を示せば十分である．(($\alpha_1x)(\alpha_2y)=\alpha_3(xy)$，$x,y\in\mathfrak{C}$ ならば $(\alpha_1{}^{-1}x)(\alpha_2{}^{-1}y)=\alpha_3{}^{-1}(xy)$，$x,y\in\mathfrak{C}$ が成り立つことに注意)．さて

$$(\alpha_1x)(\alpha_2y)=xy,\quad x,y\in\mathfrak{C}$$

としよう．$p=\alpha_11$，$q=\alpha_21$ とおくと $|p|=|q|=1$ である．上式で $y=1$ とおくと $(\alpha_1x)q=x$ より $\alpha_1x=x\overline{q}$ となる．同様に $x=1$ とおくと $\alpha_2y=\overline{p}y$ となり，

さらに $x=y=1$ とおくと $pq=1$ となる．これより

$$(xp)(\overline{p}\,y)=xy, \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

が成り立つ．y の代りに py とおくと

$$(xp)y=x(py)$$

がすべての $x, y\in\mathfrak{C}$ で成り立つので，$p\in \boldsymbol{R}$ が分かる．$|p|=1$ より $p=\pm 1$ である．以上で $\alpha_1 x=\alpha_2 x=\pm x$ となり，$\alpha_1=\alpha_2=1$，$\alpha_1=\alpha_2=-1$ が示された．

補題1.8 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in O(8)$ に対して

$$(\alpha_1 x)(\alpha_2 y)=\overline{\alpha_3(\overline{xy})}, \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

が成り立つならば

$$(\alpha_2 x)(\alpha_3 y)=\overline{\alpha_1(\overline{xy})}, \quad x, y\in\mathfrak{C},$$

$$(\alpha_3 x)(\alpha_1 y)=\overline{\alpha_2(\overline{xy})}, \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

も成り立つ．

証明 $(\alpha_1 x)(\alpha_2 y)=\overline{\alpha_3(\overline{xy})}$ $(x\neq 0$，$y\neq 0$ としておく$)$ の両辺に，左から $\overline{\alpha_1 x}$ を，右から $\alpha_3(\overline{xy})$ を掛けると $|x|^2(\alpha_2 y)(\alpha_3(\overline{xy}))=\overline{\alpha_1 x}|xy|^2$，すなわち

$$(\alpha_2 y)(\alpha_3(\overline{xy}))=\overline{\alpha_1 x}|y|^2$$

を得る．x の代りに $\overline{yz}$ とおくと，$(\alpha_2 y)(\alpha_3(\,\overline{y}yz))=\overline{\alpha_1(\overline{yz})}|y|^2$，すなわち

$$(\alpha_2 y)(\alpha_3 z)=\overline{\alpha_1(\overline{yz})}$$

を得る．

補題1.9 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in O(8)$ が

$$(\alpha_1 x)(\alpha_2 y)=\alpha_3(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

を満たすならば，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in SO(8)$ となる．

証明 $\alpha_3\notin SO(8)$ とする．写像 $\varepsilon:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$，$\varepsilon x=\overline{x}$ は $\varepsilon\in O(8)$，$\det\varepsilon=-1$ であるから $\beta_3=\varepsilon\alpha_3^{-1}\in SO(8)$ である．この β_3 に対して 3 対原理 (定理1.7) を用いると，$\beta_1, \beta_2\in SO(8)$ が存在して

$$(\beta_1(\alpha_1 x))(\beta_2(\alpha_2 y))=\beta_3((\alpha_1 x)(\alpha_2 y))=\beta_3(\alpha_3(xy)), \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

が成りたつ．$\gamma_1=\beta_1\alpha_1$，$\gamma_2=\beta_2\alpha_2\in O(8)$ とおくと

$$(\gamma_1 x)(\gamma_2 y)=\overline{xy}, \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

となる．$p=\gamma_1 1$，$q=\gamma_2 1$ とおくと $|p|=|q|=1$ である．上式で $y=1$ とおくと $(\gamma_1 x)q=\overline{x}$ より $\gamma_1 x=\overline{x}\,\overline{q}=\overline{qx}$ となる．同様に $x=1$ とおくと $\gamma_2 y=\overline{yp}$ とな

り，さらに $x=y=1$ とおくと $pq=1$ となる．これより $\overline{\overline{p}x}\ \overline{yp}=\overline{xy}$，すなわち

$$(yp)(\overline{p}x)=xy,\quad x,y\in\mathfrak{C} \tag{i}$$

が成り立つ．$y=\overline{p}$ とおくと

$$\overline{p}x=x\overline{p}$$

がすべての $x\in\mathfrak{C}$ で成り立つので，$p\in\boldsymbol{R}$ が分かる．$|p|=1$ より $p=\pm 1$ である．よって(i)より

$$yx=xy,\quad x,y\in\mathfrak{C}$$

となり，$\mathfrak{C}$ が可換性をもち矛盾する．よって $\alpha_3\in SO(8)$ である．α_1，α_2 については，補題1.8と今の結果を組み合せるとよい．

5　G_2 の位数 3 の自己同型写像 w と部分群 $SU(3)$

命題1.10　$a\in\mathfrak{C}$，$|a|=1$ に対し，写像 $\alpha_a:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$，

$$\alpha_a x=ax\overline{a},\quad x\in\mathfrak{C}$$

が G_2 に属するための必要十分条件は $a^3=\pm 1$ である．

証明　Moufang の公式 $(\overline{a}x)(y\overline{a})=\overline{a}(xy)\overline{a}$ に補題1.8を適用すると

$$(x\overline{a})(aya)=(xy)a,\quad x,y\in\mathfrak{C}$$

となる．x の代りに ax，y の代りに ya とおくと

$$(ax\overline{a})(aya^2)=a(xy)a^2,\quad x,y\in\mathfrak{C} \tag{i}$$

が成り立つ．さて，α_a が G_2 に属するとすると

$$(ax\overline{a})(ay\overline{a})=a(xy)\overline{a},\quad x,y\in\mathfrak{C}$$

であるが，3対原理の符号を除いた一意性（定理1.7（補題1.8も参照））を用いると

$$aya^2=\pm ay\overline{a},\quad y\in\mathfrak{C}$$

が成り立つ．そこで $y=1$ とおくと $a^3=\pm 1$ を得る．逆は(i)より明らかである．

$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}e\in\boldsymbol{C}\subset\mathfrak{C}$ とおくと，$\omega^3=1$ であるから $\alpha_{\overline{\omega}}\in G_2$ である（命題1.10）．以後 $\alpha_{\overline{\omega}}$ を w と書く：

$$wx=\overline{\omega}x\omega,\quad x\in\mathfrak{C}.$$

補題1.11 $w(a+\boldsymbol{m})=a+\omega\boldsymbol{m},\quad a+\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3=\mathfrak{C}.$

証明 $w(a+\boldsymbol{m})=\overline{\omega}(a+\boldsymbol{m})\omega=\overline{\omega}a\omega+\overline{\omega}^2\boldsymbol{m}=a+\omega\boldsymbol{m}.$

G_2 の部分群 $(G_2)^w$ を

$$(G_2)^w=\{\alpha\in G_2\,|\,w\alpha=\alpha w\}$$

で定義する．

定理1.12 $$(G_2)^w=(G_2)_e\cong SU(3).$$

証明 $(G_2)^w=(G_2)_e$ を示そう．まず $(G_2)_e\subset(G_2)^w$ である．実際，$\alpha\in(G_2)_e$ ならば，$a+\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3=\mathfrak{C}$ に対して

$$\begin{aligned}w(\alpha(a+\boldsymbol{m}))&=w(a+\alpha\boldsymbol{m})=a+\omega(\alpha\boldsymbol{m})\quad(\text{補題}1.11)\\&=a+(\alpha\omega)(\alpha\boldsymbol{m})=a+\alpha(\omega\boldsymbol{m})=\alpha(a+\omega\boldsymbol{m})=\alpha(w(a+\boldsymbol{m}))\end{aligned}$$

となるから $w\alpha=\alpha w$，すなわち $\alpha\in(G_2)^w$ である．逆に $\alpha\in(G_2)^w$ とする．$\mathfrak{C}_w=\{x\in\mathfrak{C}\,|\,wx=x\}$ とおくと $\mathfrak{C}_w=\boldsymbol{C}$ である．α は $w\alpha=\alpha w$ を満たすから，α は $\mathfrak{C}_w$ を不変にする．よって，α の $\mathfrak{C}_w$ への制限は $\boldsymbol{C}$ の自己同型写像を誘導するから

$$\alpha e=e\quad\text{または}\quad\alpha e=-e$$

となる．後者は不可能である．実際，$\gamma:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$，$\gamma(a+\boldsymbol{m})=\overline{a}+\overline{\boldsymbol{m}}$ を考えると $\gamma\in G_2$ でありかつ $\gamma e=-e$ となっている．$\beta=\gamma\alpha$ とおくと $\beta e=e$ であるから $\beta\in(G_2)_e\subset(G_2)^w$ となる．これより $\gamma=\beta\alpha^{-1}\in(G_2)^w$ となるので

$$\omega\overline{\boldsymbol{m}}=w\overline{\boldsymbol{m}}=w(\gamma\boldsymbol{m})=\gamma(w\boldsymbol{m})=\overline{w\boldsymbol{m}}=\overline{\omega\boldsymbol{m}}=\overline{\omega}\,\overline{\boldsymbol{m}}$$

がすべての $\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{C}^3$ に対して成り立つことになり矛盾する．よって，$\alpha e=e$ となり $\alpha\in(G_2)_e$ である．以上で $(G_2)^w=(G_2)_e\cong SU(3)$（定理1.3）が証明された．

6 G_2 の対合自己同型写像 γ と部分群 $(Sp(1)\times Sp(1))/Z_2$

4元数体 $\boldsymbol{H}$ は Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ に

$$\boldsymbol{H}=\{x_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\,|\,x_i\in\boldsymbol{R}\}$$

として含まれていると考える：$\boldsymbol{H}\subset\mathfrak{C}$．任意の Cayley 数 $x\in\mathfrak{C}$ は

$$\begin{aligned}x&=x_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4+x_5e_5+x_6e_6+x_7e_7\qquad x_i\in\boldsymbol{R}\\&=(x_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)+(x_4+x_5e_1-x_6e_2+x_7e_3)e\end{aligned}$$

すなわち

$$x=m+ae, \quad m, a\in \boldsymbol{H}$$

と一意に表せる．さて，$\boldsymbol{H}\oplus\boldsymbol{H}e$ に積，内積，共役元をそれぞれ

$$(m+ae)(n+be)=(mn-\overline{b}a)+(a\overline{n}+bm)e,$$
$$(m+ae, n+be)=(m, n)+(a, b),$$
$$\overline{m+ae}=\overline{m}-ae$$

で定義する．これらは Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ のそれらに対応しているので，以後 $\mathfrak{C}$ と $\boldsymbol{H}\oplus\boldsymbol{H}e$ を同一視することにする：$\mathfrak{C}=\boldsymbol{H}\oplus\boldsymbol{H}e$.

定義　$\boldsymbol{R}$-線型写像 $\gamma:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ を

$$\gamma(m+ae)=m-ae, \quad m+ae\in\boldsymbol{H}\oplus\boldsymbol{H}e=\mathfrak{C}$$

で定義する．$\gamma\in G_2$ であり，$\gamma^2=1$ である．(この γ は定理1.12の証明にある γ と一致している)．

G_2 の部分群

$$(G_2)^\gamma=\{\alpha\in G_2 \mid \gamma\alpha=\alpha\gamma\}$$

を調べよう．そのため，$\mathfrak{C}$ の γ による固有空間

$$\mathfrak{C}_\gamma=\{x\in\mathfrak{C} \mid \gamma x=x\}=\boldsymbol{H},$$
$$\mathfrak{C}_{-\gamma}=\{x\in\mathfrak{C} \mid \gamma x=-x\}=\boldsymbol{H}e$$

を考える．$\mathfrak{C}_\gamma$, $\mathfrak{C}_{-\gamma}$ は $(G_2)^\gamma$ の作用で不変である．

定理1.13　　$(G_2)^\gamma\cong(Sp(1)\times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2, \ \ \boldsymbol{Z}_2=\{(1, 1), (-1, -1)\}.$

証明　写像 $\varphi: Sp(1)\times Sp(1)\to(G_2)^\gamma$ を

$$\varphi(p, q)(m+ae)=qm\overline{q}+(pa\overline{q})e, \quad m+ae\in\boldsymbol{H}\oplus\boldsymbol{H}e=\mathfrak{C}$$

で定義する．そのために，まず $\varphi(p, q)\in(G_2)^\gamma$ を証明しなければならない．実際，$\alpha=\varphi(p, q)$, $x=m+ae$, $y=n+be\in\mathfrak{C}$ に対し

$$\begin{aligned}(\alpha x)(\alpha y)&=(qm\overline{q}+(pa\overline{q})e)(qn\overline{q}+(pb\overline{q})e)\\&=((qm\overline{q})(qn\overline{q})-\overline{(pb\overline{q})}(pa\overline{q}))+((pa\overline{q})\overline{(qn\overline{q})}+(pb\overline{q})(qm\overline{q}))e\\&=q(mn-\overline{b}a)\overline{q}+(p(a\overline{n}+bm)\overline{q})e\\&=\varphi(p, q)((m+ae)(n+be))=\alpha(xy)\end{aligned}$$

となるから $\varphi(p, q)\in G_2$ である．さらに $\gamma\varphi(p, q)=\varphi(p, q)\gamma$ であるから $\varphi(p, q)\in(G_2)^\gamma$ である．明らかに φ は群準同型写像である．φ は全射である．実際，

$\alpha\in(G_2)^\gamma$ は $\mathfrak{C}_\gamma=\boldsymbol{H}$ の自己同型写像を誘導するので，ある $q\in Sp(1)$ を用いて

$$\alpha m=qm\overline{q}, \quad m\in\boldsymbol{H}$$

と表せる([3]定理10.6). $\beta=\varphi(1,q)^{-1}\alpha$ とおくと，$\beta\in(G_2)^\gamma$ であって $\beta|\boldsymbol{H}=1$ となる. β は $\mathfrak{C}_{-\gamma}=\boldsymbol{H}e$ の写像を誘導するので $\beta e=pe$, $p\in\boldsymbol{H}$ とおく. $|p|=|pe|=|\beta e|=|e|=1$ より $p\in Sp(1)$ である. $m+ae\in\mathfrak{C}$ に対し

$$\begin{aligned}\beta(m+ae)&=\beta m+(\beta a)(\beta e)=m+a(pe)\\&=m+(pa)e=\varphi(p,1)(m+ae)\end{aligned}$$

となるので $\beta=\varphi(p,1)$ である. よって $\alpha=\varphi(1,q)\beta=\varphi(1,q)\varphi(p,1)=\varphi(p,q)$ となり，φ の全射が示された. $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{(1,1),(-1,-1)\}=\boldsymbol{Z}_2$ は容易に分かる. よって Lie 群同型 $(G_2)^\gamma\cong(Sp(1)\times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2$ を得る.（この群は $SO(4)$ に同型である（[3]定理10.7)).

7　G_2 の中心 $z(G_2)$

定理1.14　群 G_2 の中心 $z(G_2)$ は 1 のみからなる：$z(G_2)=\{1\}$.

証明　$\alpha\in z(G_2)$ とする. $\gamma\alpha=\alpha\gamma$ より $\alpha\in SO(4)$ であり（定理1.13)，さらに $\alpha\in z(SO(4))$ である. $z(SO(4))$ は位数 2 の群である（[3]定理9.2）から

$$\alpha=1 \quad \text{または} \quad \alpha=\gamma$$

となる. しかるに $\gamma\notin z(G_2)$ である(定理1.13)から，$\alpha=1$ である.

8　Lie 環 $\mathfrak{d}_4$ の外部自己同型写像

Lie 群 G_2 の Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ を調べるために Lie 群 $SO(8)$ の Lie 環

$$\mathfrak{d}_4=\{D\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C})\,|\,(Dx,y)+(x,Dy)=0\}$$

を考察しておく. $\boldsymbol{R}$-線型写像 $G_{ij}:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$, $i,j=0,1,\cdots,7$, $i\neq j$ を

$$G_{ij}e_j=e_i, \quad G_{ij}e_i=-e_j, \quad G_{ij}e_k=0, \ k\neq i,j$$

を満たすように定義すると，$G_{ij}\in\mathfrak{d}_4$ であり，

$$\{G_{ij}\,|\,0\leqq i<j\leqq 7\}$$

は $\mathfrak{d}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基になる.

$\boldsymbol{R}$-線型写像 $F_{ij}:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$, $i,j=0,1,\cdots,7$, $i\neq j$ を

$$i\neq 0 \text{ のとき}, \ F_{i0}x=\frac{1}{2}e_ix, \quad F_{0i}x=-\frac{1}{2}e_ix, \quad x\in\mathfrak{C}$$

$$i \neq 0,\ j \neq 0,\ i \neq j \text{ のとき},\ F_{ij}x = \frac{1}{2}e_j(e_i x), \quad x \in \mathfrak{C}$$

で定義する．

補題1.15　$F_{ij} \in \mathfrak{d}_4$, $i, j = 0, 1, \cdots, 7$, $i \neq j$ である．F_{ij}, $i<j$ を $\mathfrak{d}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基 G_{ij} を用いて表すと次のようになる．

$$\begin{cases} 2F_{01} = G_{01} + G_{23} + G_{45} + G_{67} \\ 2F_{23} = G_{01} + G_{23} - G_{45} - G_{67} \\ 2F_{45} = G_{01} - G_{23} + G_{45} - G_{67} \\ 2F_{67} = G_{01} - G_{23} - G_{45} + G_{67} \end{cases} \quad \begin{cases} 2F_{02} = G_{02} - G_{13} - G_{46} + G_{57} \\ 2F_{13} = -G_{02} + G_{13} - G_{46} + G_{57} \\ 2F_{46} = -G_{02} - G_{13} + G_{46} + G_{57} \\ 2F_{57} = G_{02} + G_{13} + G_{46} + G_{57} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2F_{03} = G_{03} + G_{12} + G_{47} + G_{56} \\ 2F_{12} = G_{03} + G_{12} - G_{47} - G_{56} \\ 2F_{47} = G_{03} - G_{12} + G_{47} - G_{56} \\ 2F_{56} = G_{03} - G_{12} - G_{47} + G_{56} \end{cases} \quad \begin{cases} 2F_{04} = G_{04} - G_{15} + G_{26} - G_{37} \\ 2F_{15} = -G_{04} + G_{15} + G_{26} - G_{37} \\ 2F_{26} = G_{04} + G_{15} + G_{26} + G_{37} \\ 2F_{37} = -G_{04} - G_{15} + G_{26} + G_{37} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2F_{05} = G_{05} + G_{14} - G_{27} - G_{36} \\ 2F_{14} = G_{05} + G_{14} + G_{27} + G_{36} \\ 2F_{27} = -G_{05} + G_{14} + G_{27} - G_{36} \\ 2F_{36} = -G_{05} + G_{14} - G_{27} + G_{36} \end{cases} \quad \begin{cases} 2F_{06} = G_{06} - G_{17} - G_{24} + G_{35} \\ 2F_{17} = -G_{06} + G_{17} - G_{24} + G_{35} \\ 2F_{24} = -G_{06} - G_{17} + G_{24} + G_{35} \\ 2F_{35} = G_{06} + G_{17} + G_{24} + G_{35} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2F_{07} = G_{07} + G_{16} + G_{25} + G_{34} \\ 2F_{16} = G_{07} + G_{16} - G_{25} - G_{34} \\ 2F_{25} = G_{07} - G_{16} + G_{25} - G_{34} \\ 2F_{34} = G_{07} - G_{16} - G_{25} + G_{34}. \end{cases}$$

特に F_{ij}, $0 \leqq i < j \leqq 7$ は $\mathfrak{d}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基である．

定義　$\boldsymbol{R}$-線型写像 $\kappa, \pi, \nu : \mathfrak{d}_4 \to \mathfrak{d}_4$ をそれぞれ

$$(\kappa D)x = \overline{D\overline{x}}, \quad x \in \mathfrak{C},$$
$$\pi(G_{ij}) = F_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, 7,$$
$$\nu = \pi\kappa$$

で定義する．

補題1.16　κ, π, ν は Lie 環 $\mathfrak{d}_4$ の自己同型写像である：$\kappa, \pi, \nu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{d}_4)$.

証明　κ は $\kappa^2 = 1$ であるから $\mathfrak{d}_4$ の $\boldsymbol{R}$-同型写像である．$D_1, D_2 \in \mathfrak{d}_4$ に対し

$$[\kappa D_1, \kappa D_2]x=(\kappa[D_1, D_2])x, \quad x\in\mathfrak{C}$$

が容易に示されるので $\kappa\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{d}_4)$ である．次に，π は $\mathfrak{d}_4$ は $\boldsymbol{R}$-基 G_{ij}, $i<j$ を $\mathfrak{d}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基 F_{ij}, $i<j$ に移すので $\mathfrak{d}_4$ の $\boldsymbol{R}$-同型写像である．π が $\mathfrak{d}_4$ の自己同型写像であることを示すには

$$[\pi G_{ij}, \pi G_{kl}]=\pi[G_{ij}, G_{kl}]$$

を示せばよいが，そのためには

$$[F_{ij}, F_{jk}]=F_{ik}, \quad i, j, k \text{ は相異なる},$$
$$[F_{ij}, F_{kl}]=0, \quad i, j, k, l \text{ は相異なる}$$

を示すと十分である．以下の計算では i, j, k, l はすべて異なり，かつ $i, j, k, l\neq 0$ とする．$x\in\mathfrak{C}$ に対して

$$[F_{i0}, F_{0k}]x=(F_{i0}F_{0k}-F_{0k}F_{0i})x=-\frac{1}{4}e_i(e_kx)+\frac{1}{4}e_k(e_ix)$$
$$=\frac{1}{2}e_k(e_ix)=F_{ik}x,$$
$$[F_{i0}, F_{kl}]x=(F_{i0}F_{kl}-F_{kl}F_{i0})x=\frac{1}{4}e_i(e_l(e_kx))-\frac{1}{4}e_l(e_k(e_ix))$$
$$=-\frac{1}{4}e_l(e_i(e_kx))+\frac{1}{4}e_l(e_i(e_kx))=0,$$
$$[F_{ij}, F_{jk}]x=(F_{ij}F_{jk}-F_{jk}F_{ij})x$$
$$=\frac{1}{4}e_j(e_i(e_k(e_jx)))-\frac{1}{4}e_k(e_j(e_j(e_ix)))$$
$$=-\frac{1}{4}e_i(e_kx)+\frac{1}{4}e_k(e_ix)=\frac{1}{2}e_k(e_ix)=F_{ik}x,$$
$$[F_{ij}, F_{kl}]x=(F_{ij}F_{kl}-F_{kl}F_{ij})x$$
$$=\frac{1}{4}e_j(e_i(e_l(e_kx)))-\frac{1}{4}e_l(e_k(e_j(e_ix)))=\cdots=0$$

となる．よって $\pi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{d}_4)$ である．最後に $\nu=\pi\kappa\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{d}_4)$ である．

$a\in\mathfrak{C}$ に対し，$\boldsymbol{R}$-線型写像 $L_a, R_a, T_a: \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ をそれぞれ

$$L_ax=ax, \quad R_ax=xa, \quad T_ax=ax+xa=(L_a+R_a)x$$

で定義する．以後

$$\mathfrak{C}_0=\{a\in\mathfrak{C} \mid \overline{a}=-a\}$$

の記号を用いる．

補題1.17 $a\in\mathfrak{C}_0$ に対し

(1)　$L_a, R_a, T_a \in \mathfrak{d}_4$

(2)　$\kappa L_a = -R_a$,　$\kappa R_a = -L_a$,　$\kappa T_a = -T_a$

(3)　$\pi L_a = T_a$,　$\pi R_a = -R_a$,　$\pi T_a = L_a$

(4)　$\nu L_a = R_a$,　$\nu R_a = -T_a$,　$\nu T_a = -L_a$

が成り立つ．

証明　(1)　$(L_a x, y) = (ax, y) = (x, \overline{a} y) = -(x, ay) = -(x, L_a y)$，$x, y \in \mathfrak{C}$ より $L_a \in \mathfrak{d}_4$ である．$R_a \in \mathfrak{d}_4$ も同様であり，$T_a = L_a + R_a \in \mathfrak{d}_4$ である．

(2)　$(\kappa L_a)x = \overline{L_a \overline{x}} = \overline{a \overline{x}} = x\overline{a} = -xa = -R_a x$，$x \in \mathfrak{C}$ より $\kappa L_a = -R_a$ である．他も同様である．

(3)　$a = e_i$，$i = 1, \cdots, 7$ のときに示すと十分である．まず

$$L_{e_i} = 2F_{i0}, \quad T_{e_i} = 2G_{i0}$$

である．実際，$x \in \mathfrak{C}$ に対して

$$L_{e_i} x = e_i x = 2F_{i0} x,$$

$$T_{e_i} x = e_i x + x e_i = \begin{cases} 2e_i, & x = 1 \\ -2, & x = e_i \\ 0, & x = e_j, \quad j \neq 0, i \end{cases}$$

となるからである．さて

$$\pi L_{e_i} = \pi(2F_{i0}) = -2\pi F_{0i} = -2G_{0i} \text{（補題1.15）} = 2G_{i0} = T_{e_i},$$

$$\pi T_{e_i} = \pi(2G_{i0}) = 2F_{i0} = L_{e_i},$$

$$\pi R_a = \pi(T_a - L_a) = L_a - T_a = -R_a$$

である．

(4)　$\nu = \pi\kappa$ であるから (2), (3) の結果である．

補題1.18　Lie 環 $\mathfrak{d}_4$ は $\{L_a \mid a \in \mathfrak{C}_0\}$ により，高々 1 度 Lie 積 [,] を行うことによって生成される．すなわち，任意の $D \in \mathfrak{d}_4$ は，$a, b_i, c_i \in \mathfrak{C}_0$ を用いて

$$D = L_a + \sum_i [L_{b_i}, L_{c_i}]$$

と表される．

証明　$\mathfrak{d}_4$ において，$\{L_a \mid a \in \mathfrak{C}_0\}$ により生成される部分 Lie 環を $\mathfrak{d}$ とする．$L_{e_i} = 2F_{i0}$，$[L_{e_i}, L_{e_j}] = [2F_{i0}, 2F_{j0}] = -4F_{ij}$ ($i \neq 0$，$j \neq 0$，$i \neq j$) であるから，

$\mathfrak{d}$ は F_{ij}, $i, j=0, 1, \cdots, 7$, $i \neq j$ を含む．F_{ij}, $0 \leqq i < j \leqq 7$ は $\mathfrak{d}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基である（補題1.15）から，$\mathfrak{d}=\mathfrak{d}_4$ となる．

定理1.19　Lie 環 $\mathfrak{d}_4$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{d}_4)$ において，κ, π により生成される部分群 $\mathfrak{S}_3$ は 3 次の対称群 S_3 に同型である．なお，κ, π, ν の間には次の関係がある．

$$\kappa^2=1, \quad \pi^2=1, \quad \nu^3=1, \quad \nu=\pi\kappa.$$

証明　$\mathfrak{d}_4$ は $\{L_a \mid a \in \mathfrak{C}_0\}$ で生成される（補題1.18）ので，$\kappa^2=1$, $\pi^2=1$ 等の関係は L_a に施して示せばよいが，これらは補題1.17.(2), (3), (4)が示している．また写像 $f: \mathfrak{S}_3 \to S_3$,

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \kappa \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\nu \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu^2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nu\pi \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

が群同型を与えている．

次の定理1.20，補題1.21はそれぞれ定理1.7，補題1.8に対応するものであり，それらの結果であるともいえるが，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{d}_4)$ の関係も含めて記しておく．

定理1.20（$\mathfrak{d}_4$ における 3 対原理）　任意の $D_1 \in \mathfrak{d}_4$ に対して，$D_2, D_3 \in \mathfrak{d}_4$ が存在し

$$(D_1x)y + x(D_2y) = D_3(xy), \quad x, y \in \mathfrak{C}$$

が成り立つ．かつ，このような D_2, D_3 は D_1 に対して 1 意に定まり，かつ

$$D_2 = \nu D_1, \quad D_3 = \pi D_1$$

により定まる．

証明
$$(ax)y + x(ya) = a(xy) + (xy)a, \quad x, y \in \mathfrak{C}$$
において，$a \in \mathfrak{C}_0$ とすると $L_a, R_a, T_a \in \mathfrak{d}_4$（補題1.17）であって

$$(L_ax)y + x(R_ay) = T_a(xy) \tag{i}$$

である．同様に $b \in \mathfrak{C}_0$ に対し

$$(L_bx)y + x(R_by) = T_b(xy) \tag{ii}$$

である．(ii) に T_a を施して (i) を用いると

$$(L_aL_bx)y+(L_bx)(R_ay)+(L_ax)(R_by)+x(R_aR_by)=T_aT_b(xy)$$

となる．a と b をいれかえて，上式から引くと

$$([L_a, L_b]x)y+x([R_a, R_b]y)=[T_a, T_b](xy) \tag{iii}$$

を得る．しかるに $D_1\in\mathfrak{d}_4$ は

$$D_1=L_a+\sum[L_b, L_c], \quad a, b, c\in\mathfrak{C}_0$$

と表される（補題1.18）ので，$D_2=R_a+\sum[R_b, R_c]$，$D_3=T_a+\sum[T_b, T_c]$ とおくと，(i)，(iii)より

$$(D_1x)y+x(D_2y)=D_3(xy)$$

を得る．次に D_2，D_3 が D_1 に対して一意に定まることを示そう．そのためには $D_1=0$ のとき $D_2=D_3=0$ を示せば十分である．さて

$$x(D_2y)=D_3(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

としよう．$x=1$ とおくと，$D_2y=D_3y$ となるので $D_2=D_3$（$=D$ とおく）となり

$$x(Dy)=D(xy) \tag{iv}$$

を得る．$a=D1$ とおくと，$2(a, 1)=(a, 1)+(1, a)=(D1, 1)+(1, D1)=0$ より $a\in\mathfrak{C}_0$ である．(iv)において $y=1$ とおくと $xa=Dx$ となるので，(iv)より

$$x(ya)=(xy)a, \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

が成りたつ．これより $a\in\boldsymbol{R}$ が分かる．$a\in\mathfrak{C}_0$ より $a=0$ である．$Dx=xa=0$ より $D=0$ となる．これで一意性が示された．$D_1\in\mathfrak{d}_4$ を $D_1=L_a+\sum[L_b, L_c]$，$a, b, c\in\mathfrak{C}_0$ と表す（補題1.18）とき，上記の結果と一意性より $D_2=R_a+\sum[R_b, R_c]$，$D_3=T_a+\sum[T_b, T_c]$ が分かる．これは $D_2=\nu D_1$，$D_3=\pi D_1$ を示している（補題1.17）．

補題1.21　$D_1, D_2, D_3\in\mathfrak{d}_4$ に対して

$$(D_1x)y+x(D_2y)=(\kappa D_3)(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

が成り立つならば

$$(D_2x)y+x(D_3y)=(\kappa D_1)(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C},$$

$$(D_3x)y+x(D_1y)=(\kappa D_2)(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

が成り立つ．

証明　$D_2\in\mathfrak{d}_4$ に対して $D_3', D_1'\in\mathfrak{d}_4$ が存在して

$$(D_2x)y+x(D_3'y)=(\kappa D_1')(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C}$$

が成り立ち，かつ $D_3'=\nu D_2$，$\kappa D_1'=\pi D_2$ である（定理1.20）．補題の仮定は D_2

$=\nu D_1$, $\kappa D_3=\pi D_1$ であるから，定理1.19の公式を用いて

$$D_3'=\nu D_2=\nu\nu D_1=\nu^{-1}D_1=\kappa\pi D_1=\kappa\kappa D_3=D_3,$$
$$D_1'=\kappa\pi D_2=\nu^{-1}D_2=D_1$$

を得る.

9 G_2 の Lie 環 $\mathfrak{g}_2$

定理1.22 Lie 群 G_2 の Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ は

$$\mathfrak{g}_2=\{D\in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{C})\,|\,D(xy)=(Dx)y+x(Dy)\}$$

である.

証明 $D\in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{C})$ がすべての $t\in \boldsymbol{R}$ に対して $\exp tD\in G_2$，すなわち $(\exp tD)(xy)=((\exp tD)x)((\exp tD)y)$, $x, y\in\mathfrak{C}$ が成り立つとすると，t で微分して $t=0$ とおくと $D(xy)=(Dx)y+x(Dy)$ となる．逆に $\mathfrak{D}\in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{C})$ が $D(xy)=(Dx)y+x(Dy)$ を満たせば，すべての $t\in \boldsymbol{R}$ に対して $\exp tD\in G_2$ となる.

Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ を調べるために，$SO(7)$ の Lie 環

$$\mathfrak{b}_3=\{D\in\mathfrak{d}_4\,|\,D1=0\}$$
$$=\{D\in\mathfrak{d}_4\,|\,\kappa D=D\}=\{D\in\mathfrak{d}_4\,|\,\nu D=\pi D\}$$

も用いる.

補題1.23 $\mathfrak{g}_2$ は $\mathfrak{b}_3$ の部分 Lie 環である．さらに

$$\mathfrak{g}_2=\{D\in\mathfrak{d}_4\,|\,\nu D=D, \pi D=D\}$$
$$=\{D\in\mathfrak{d}_4\,|\,\text{すべての } \lambda\in\mathfrak{S}_3 \text{ に対し } \lambda D=D\}$$
$$=\{D\in\mathfrak{b}_3\,|\,\pi D=D\}$$

が成り立つ.

証明 $D\in\mathfrak{g}_2$ とする．$(Dx)y+x(Dy)=D(xy)$ において $x=y=1$ とおくと $D1=0$ を得る．つぎに

$$Dx\in\mathfrak{C}_0,\quad x\in\mathfrak{C}$$

を示そう．$i\neq 0$ ならば $(De_i)e_i+e_i(De_i)=D(e_ie_i)=D(-1)=0$ より，$De_i\in\mathfrak{C}_0$ が分かる．これと $D1=0$ と併せて $Dx\in\mathfrak{C}_0$ が示される．さて，$x, y\in\mathfrak{C}_0$ なら

ば

$$(xy+yx)=-(x\overline{y}+y\overline{x})=-2(x,y)$$

に注意して，これに D を施すと $(Dx)y+x(Dy)+(Dy)x+y(Dx)=0$ となる．$Dx, Dy\in\mathfrak{C}_0$ に注意すると

$$(Dx,y)+(x,Dy)=0,\quad x,y\in\mathfrak{C}$$

を得る．よって $\mathfrak{g}_2\subset\mathfrak{b}_3$ である．後半は定理1.19，定理1.20より明らかである．

補題1.24　$\mathfrak{g}_2$ の元は次の 7 つの元の有限和で表される．

$$\begin{aligned}
&\lambda G_{23}+\mu G_{45}+\nu G_{67}, \quad -\lambda G_{13}-\mu G_{46}+\nu G_{57},\\
&\lambda G_{12}+\mu G_{47}+\nu G_{56}, \quad -\lambda G_{15}+\mu G_{26}-\nu G_{37}, \quad \lambda,\mu,\nu\in\boldsymbol{R}\\
&\lambda G_{14}-\mu G_{27}-\nu G_{36}, \quad -\lambda G_{17}-\mu G_{24}+\nu G_{35}, \quad \lambda+\mu+\nu=0\\
&\lambda G_{16}+\mu G_{25}+\nu G_{34}.
\end{aligned}$$

逆にこれらの元は $\mathfrak{g}_2$ の元である．(このことからも，$\mathfrak{g}_2$ の次元は14である(定理1.5参照) ことが分かる)．

証明　$D\in\mathfrak{g}_2$ とする．$D\in\mathfrak{b}_3$ であるから $D=\sum_{0<i<j}\lambda_{ij}G_{ij}$, $\lambda_{ij}\in\boldsymbol{R}$ で表される．$\pi D=D$ である (補題1.23) から

$$\sum_{0<i<j}\lambda_{ij}F_{ij}=\sum_{0<i<j}\lambda_{ij}G_{ij}$$

となる．これを $1\in\mathfrak{C}$ に施すと

$$\sum_{0<i<j}\lambda_{ij}e_je_i=0$$

となる．e_je_i を e_k に直して，上式の $e_1, e_2, \cdots, e_7$ の係数を比較すると，順に

$$\begin{aligned}
&\lambda_{23}+\lambda_{45}+\lambda_{67}=0, \quad -\lambda_{13}-\lambda_{46}+\lambda_{57}=0,\\
&\lambda_{12}+\lambda_{47}+\lambda_{56}=0, \quad -\lambda_{15}+\lambda_{26}-\lambda_{37}=0,\\
&\lambda_{14}-\lambda_{27}-\lambda_{36}=0, \quad -\lambda_{17}-\lambda_{24}+\lambda_{35}=0,\\
&\lambda_{16}+\lambda_{25}+\lambda_{34}=0
\end{aligned}$$

となり補題の前半を得る．逆に，このような元 D は $D\in\mathfrak{b}_3$ であり，$\pi D=D$ であることは補題1.15の表から確かめられる．

定理1.25　$\mathfrak{C}_0$ は $\mathfrak{g}_2$-既約 $\boldsymbol{R}$-加群である．

証明　$\mathfrak{g}_2$ は $\mathfrak{C}_0$ に働いている．さて，$\{0\}\neq W$ を $\mathfrak{C}_0$ の $\mathfrak{g}_2$-不変部分 $\boldsymbol{R}$-加群とする．もし W が e_i, $i\neq0$ を含むならば，すべての e_i, $i=1,\cdots,7$ を含み，W

$=\mathfrak{C}_0$ となる．実際，

$$e_1 \xrightarrow{-G_{12}+G_{56}} e_2 \xrightarrow{-G_{23}+G_{45}} e_3 \xrightarrow{G_{25}-G_{34}} e_4 \xrightarrow{G_{23}-G_{45}}$$
$$e_5 \xrightarrow{G_{47}-G_{56}} e_6 \xrightarrow{G_{23}-G_{67}} e_7 \xrightarrow{-G_{17}+G_{24}} e_1$$

である．さて $0 \neq x=\sum_{i=1}^{7} x_i e_i \in W$ をとり，$x_1 \neq 0$ としよう．

$G_{12}-G_{56}$ を施して　$-x_1e_2+x_2e_1+x_5e_6-x_6e_5 \in W$，

$G_{23}-G_{45}$ を施して　$x_1e_3+x_6e_4 \in W$，

$G_{13}+G_{57}$ を施して　$x_1e_1 \in W$

より $e_1 \in W$ となる．上述より $W=\mathfrak{C}_0$ を得る．他の $x_i \neq 0$ のときも同様である．

10　$\mathfrak{g}_2$ の元 $D_{a,b}$

定義　$a, b \in \mathfrak{C}$ に対し，$\boldsymbol{R}$-線型写像 $D_{a,b}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を

$$D_{a,b}=[L_a, L_b]+[L_a, R_b]+[R_a, R_b]$$

で定義する．

補題1.26　$a, b \in \mathfrak{C}$ に対し

(1)　$D_{a,b}x=[[a, b], x]-3\{a, b, x\}$，　$x \in \mathfrak{C}$

(2)　$a \in \boldsymbol{R}$ または $b \in \boldsymbol{R}$　ならば　$D_{a,b}=0$

(3)　$D_{a,b}=-D_{b,a}$

(4)　$D_{a,b} \in \mathfrak{g}_2$

が成り立つ．

証明　(1)

$$[L_a, L_b]=L_{[a,b]}-2[L_a, R_b],$$
$$[R_a, R_b]=-R_{[a,b]}-2[L_a, R_b]$$

が成り立つ．実際，$\{a, b, x\}=-\{b, a, x\}=-\{a, x, b\}=\{b, x, a\}$，すなわち

$$(ab)x-a(bx)=-(ba)x+b(ax)=a(xb)-(ax)b=(bx)a-b(xa)$$

より

$$L_{ab}-L_aL_b=-L_{ba}+L_bL_a=[L_a, R_b]=[R_a, L_b] \tag{i}$$

を得る．(i)の 1 項と 3 項に L_bL_aを加えると，$L_{ab}-[L_a, L_b]=[L_a, R_b]+L_bL_a$，すなわち

$$L_{ab}-L_bL_a=[L_a, L_b]+[L_a, R_b]$$

を得る．これに(i)の $-L_{ba}+L_bL_a=[L_a, R_b]$を加えると

$$L_{[a,b]}=L_{ab}-L_{ba}=[L_a, L_b]+2[L_a, R_b]$$

を得る．もう１つの式も同様である．さて

$$\begin{aligned}D_{a,b}&=[L_a, L_b]+[L_a, R_b]+[R_a, R_b]\\&=L_{[a,b]}-R_{[a,b]}-3[L_a, R_b]\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}D_{a,b}x&=[a, b]x-x[a, b]-3(L_aR_b-R_bL_a)x\\&=[[a, b], x]-3(a(xb)-(ax)b)\\&=[[a, b], x]-3\{a, x, b\},\quad x\in\mathfrak{C}\end{aligned}$$

となる．(以上 $[a, b]$ は $ab-ba$ を意味する)．

(2), (3) は (1) より明らかである．

(4) (2) より $a, b\in\mathfrak{C}_0$ と仮定してよい．$L_a, R_a, L_b, R_b\in\mathfrak{d}_4$ であるから $D_{a,b}\in\mathfrak{d}_4$ であり，かつ $D_{a,b}1=0$ より $D_{a,b}\in\mathfrak{b}_3$ である．さらに

$$\begin{aligned}\pi D_{a,b}&=\pi([L_a, L_b]+[L_a, R_b]+[R_a, R_b])\\&=[T_a, T_b]+[T_a, -R_b]+[-R_a, -R_b]\quad(\text{補題}1.17)\\&=[L_a+R_a, L_b+R_b]-[L_a+R_a, R_b]+[R_a, R_b]\\&=[L_a, L_b]+[R_a, L_b]+[R_a, R_b]\\&=[L_a, L_b]+[L_a, R_b]+[R_a, R_b]\ (\text{上記}(3))=D_{a,b}\end{aligned}$$

より $D_{a,b}\in\mathfrak{g}_2$ である（補題1.23)．

補題1.27　$D\in\mathfrak{g}_2$, $a, b\in\mathfrak{C}$ に対し

$$[D, D_{a,b}]=D_{Da,b}+D_{a,Db}$$

が成り立つ．

証明　$[D, [L_a, L_b]]=[L_{Da}, L_b]+[L_a, L_{Db}]$ である．実際,

$$\begin{aligned}[D, [L_a, L_b]]x&=D[L_a, L_b]x-[L_a, L_b]Dx\\&=D(a(bx))-b(ax))-a(b(Dx))+b(a(Dx))\\&=(Da)(bx)+a((Db)x)+a(b(Dx))-(Db)(ax)-b((Da)x)-b(a(Dx))\\&\quad-a(b(Dx))+b(a(Dx))\\&=(Da)(bx)-b((Da)x)+a((Db)x)-(Db)(ax)\\&=[L_{Da}, L_b]x+[L_a, L_{Db}]x,\quad x\in\mathfrak{C}\end{aligned}$$

である．同様に $[D, [R_a, R_b]]=[R_{Da}, R_b]+[R_a, R_{Db}]$, $[D, [L_a, R_b]]=[L_{Da},$

$R_b]+[L_a, R_{Db}]$ が成り立つので補題を得る．

11　$\mathfrak{g}_2{}^C$ の単純性

$\mathfrak{C}^C=\{x_1+ix_2 \mid x_i\in\mathfrak{C}\}$ を Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ の複素化とする．$\mathfrak{C}$ と同様に，$\mathfrak{C}^C$ にも積 xy，共役元 $\overline{x}$，内積 (x, y) が定義されて G_2, **1, 1-11**（長さ $|x|$ に関する公式を除いて）の性質が成り立つ．この $\mathfrak{C}^C$ を**複素 Cayley 代数**という．$\mathfrak{C}^C$ における複素共役を τ で表わす：$\tau(x_1+ix_2)=x_1-ix_2$，$x_1, x_2\in\mathfrak{C}$．τ は

$$\tau(xy)=(\tau x)(\tau y), \quad x, y\in\mathfrak{C}^C$$

を満たしている．$\mathfrak{C}^C$ において

$$\iota=\frac{1+ie}{2}, \quad \overline{\iota}=\frac{1-ie}{2}$$

とおくと，

$$\iota^2=\iota, \quad \overline{\iota}^2=\overline{\iota}, \quad \iota\overline{\iota}=\overline{\iota}\iota=0, \quad \iota+\overline{\iota}=1$$

が成り立つ．同一視 $\mathfrak{C}=\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3$ (G_2.**3**) を用いると，$\mathfrak{C}^C$ は

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^C&=\boldsymbol{C}^C\oplus(\boldsymbol{C}^3)^C\\&=\iota\boldsymbol{C}^C\oplus\overline{\iota}\boldsymbol{C}^C\oplus\iota(\boldsymbol{C}^3)^C\oplus\overline{\iota}(\boldsymbol{C}^3)^C\end{aligned}$$

と分解される．さらに

$$(1\pm ie)(a+be)=(1\pm ie)(a-bi), \quad a, b\in C$$

と表せることに注意すると，$\mathfrak{C}^C$ は

$$\mathfrak{C}^C=\iota C\oplus\overline{\iota}C\oplus\iota C^3\oplus\overline{\iota}C^3$$

と分解される．以下，ιC^3 の元を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \cdots$，$\overline{\iota}C^3$ の元を $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}', \cdots$ で表わす．（ただし，混同が起る場合は $\boldsymbol{a}$ を $\dot{\boldsymbol{a}}$，$\boldsymbol{b}$ を $\underset{\cdot}{\boldsymbol{b}}$ で表示することもある）．

補題1.28　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'\in\iota C^3$，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'\in\overline{\iota}C^3$ に対し

$$\begin{gathered}\iota\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}\iota=0, \quad \iota\boldsymbol{b}=0, \quad \boldsymbol{b}\iota=\boldsymbol{b},\\ \overline{\iota}\boldsymbol{a}=0, \quad \boldsymbol{a}\overline{\iota}=\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}\overline{\iota}=0, \quad \overline{\iota}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}')_{\cdot}, \quad \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})^{\cdot},\\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\iota, \quad \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\overline{\iota}\end{gathered}$$

が成り立つ．

C-Lie 環 $\mathfrak{g}_2{}^C$ を

$$\mathfrak{g}_2{}^C=\{D\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{C}^C) \mid D(xy)=(Dx)y+x(Dy)\}$$

で定義する．これは Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ の複素化であり，G_2.**9** で述べた $\mathfrak{g}_2$ の性質はそのまますべて $\mathfrak{g}_2{}^C$ でも成り立っている．

定理1.29　$\mathfrak{g}_2{}^C$ の部分 Lie 環 $(\mathfrak{g}_2{}^C)_\iota=\{D\in\mathfrak{g}_2{}^C\,|\,D\iota=0\}$ は Lie 環 $\mathfrak{sl}(3, C)$ に同型である：

$$(\mathfrak{g}_2{}^C)_\iota\cong\mathfrak{sl}(3, C).$$

なお，$D\in(\mathfrak{g}_2{}^C)_\iota=\mathfrak{sl}(3, C)$ の $\mathfrak{C}^C=\iota C\oplus\overline{\iota}C\oplus\iota C^3\oplus\overline{\iota}C^3$ への作用は

$$D(a+b+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=D\boldsymbol{a}-{}^tD\boldsymbol{b}$$

で与えられる．(以後 $(\mathfrak{g}_2{}^C)_\iota=\mathfrak{a}_2{}^C$ ともかく)．

証明　$(\mathfrak{g}_2{}^C)_\iota=(\mathfrak{g}_2{}^C)_e=\{D\in\mathfrak{g}_2{}^C\,|\,De=0\}$ である．$\mathfrak{su}(3, \boldsymbol{C}^C)=\{B\in M(3, \boldsymbol{C}^C)\,|\,B^*+B=0, \mathrm{tr}(B)=0\}$ とし，写像 φ：$\mathfrak{su}(3, \boldsymbol{C}^C)\to(\mathfrak{g}_2{}^C)_e$ を

$$\varphi(B)(a+\boldsymbol{m})=B\boldsymbol{m},\quad a+\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{C}^C\oplus(\boldsymbol{C}^3)^C=\mathfrak{C}^C$$

で定義すると，φ は Lie 環同型写像である．(証明は定理1.3と同様である(またこの定理1.3の結果であるともいえる))．$\mathfrak{sl}(3, C)$ と $\mathfrak{su}(3, \boldsymbol{C}^C)$ は，写像 f：$\mathfrak{sl}(3, C)\to\mathfrak{su}(3, \boldsymbol{C}^C)$,

$$f(D)=\iota D-\overline{\iota}\,{}^tD$$

で同型である（[3]定理11.1）から，$(\mathfrak{g}_2{}^C)_\iota\cong\mathfrak{sl}(3, C)$ を得る．定理の後半は

$$\varphi(f(D))(a+b+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(D)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$
$$=(\iota D-\overline{\iota}\,{}^tD)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=D\boldsymbol{a}-{}^tD\boldsymbol{b}$$

である．(最後の式は $(D\boldsymbol{a})^{\cdot}-({}^tD\boldsymbol{b})$. のことである)．

補題1.30　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}''\in\iota C^3$,　$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'\in\overline{\iota}C^3$ に対し

(1)　$D_{\boldsymbol{a},\iota}\iota=\boldsymbol{a}$,　$D_{\boldsymbol{a},\overline{\iota}}\iota=-\boldsymbol{a}$,　$D_{\boldsymbol{a},\iota}\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}')$,　$D_{\boldsymbol{a},\iota}\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ $=(\iota-\overline{\iota})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(2)　$D_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\in\mathfrak{a}_2{}^C$

(3)　$[D_{\boldsymbol{a},\iota}, D_{\boldsymbol{b},\overline{\iota}}]=D_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$,　$[D_{\boldsymbol{a},\iota}, D_{\boldsymbol{a}',\iota}]=-2D_{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}',\iota}$

(4)　$D_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}'=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}'-3(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}')\boldsymbol{a}$

が成り立つ．

証明　(1)　$D_{a,b}x=[[a, b], x]+3\{a, x, b\}$（補題1.26）を用いると容易である．

(2)　$D_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\iota=[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \iota]+3\{\boldsymbol{a}, \iota, \boldsymbol{b}\}=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})[\overline{\iota}-\iota, \iota]+3((\boldsymbol{a}\iota)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\iota\boldsymbol{b}))=0$

より $D_{a,b}\in\mathfrak{a}_2{}^C$ である（定理1.29）.

(3) $D_{a,\iota}$ を D とかくことにする.

$$[D_{a,\iota},\ D_{b,\overline{\iota}}]=D_{Db,\overline{\iota}}+D_{b,D\overline{\iota}}\quad(\text{補題}1.27)$$

$$=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})D_{\iota-\overline{\iota},\overline{\iota}}+D_{b,-a}(\text{上記}(1))=0+D_{a,b}=D_{a,b},$$

$$[D_{a,\iota},\ D_{a',\iota}]=D_{Da,\iota}+D_{a',D\iota}=D_{aa',\iota}+D_{a',a}=-D_{aa',\overline{\iota}}-D_{aa',\overline{\iota}}=-2D_{aa',\overline{\iota}}.$$

(4)
$$D_{a,b}\boldsymbol{a}'=[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{a}']+3\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}\}$$
$$=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})[\overline{\iota}-\iota,\boldsymbol{a}']-3\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}'\}$$
$$=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})(-\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}')-3((\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}'))$$
$$=-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}'+3\iota(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}'-3\boldsymbol{a}\overline{\iota}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}')$$
$$=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}'-3(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}')\boldsymbol{a}.$$

定理1.31 Lie 環 $\mathfrak{g}_2{}^C$ の元 D は

$$D=D_0+D_{a,\iota}+D_{b,\overline{\iota}},\quad D_0\in\mathfrak{a}_2{}^C,\ \ \boldsymbol{a}\in\iota C^3,\ \ \boldsymbol{b}\in\overline{\iota}C^3$$

と一意に表される.

証明 $D\iota=a+b+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $a\in\iota C$, $b\in\overline{\iota}C$, $\boldsymbol{a}\in\iota C^3$, $\boldsymbol{b}\in\overline{\iota}C^3$ とおく. $(D\iota)\iota+\iota(D\iota)=D(\iota\iota)=D\iota$ より $(a+0+0-\boldsymbol{b})+(a+0+\boldsymbol{a}-0)=a+b+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ より $a=0$, $b=0$ となる. さて, $D_0=D-D_{a,\iota}-D_{b,\overline{\iota}}$ とおく. $D_0\iota=D\iota-D_{a,\iota}\iota-D_{b,\overline{\iota}}\iota=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=0$ より $D_0\in\mathfrak{a}_2{}^C$ である. 表示の一意性を示そう. $D_0+D_{a,\iota}+D_{b,\overline{\iota}}=0$, $D_0\in\mathfrak{a}_2{}^C$, $\boldsymbol{a}\in\iota C^3$, $\boldsymbol{b}\in\overline{\iota}C^3$ とする. これを ι に施すと $0+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=0$ となるので $\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{b}=0$ を得る.

補題1.32 (1) （$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を C^3 の標準基とする）. $0\neq\boldsymbol{a}\in C^3$ は $\mathfrak{sl}(3,C)$ の作用により $\boldsymbol{e}_1$ に移すことができる.

(2) C^3 は $\mathfrak{sl}(3,C)$-既約 C-加群である.

(3) $\mathfrak{sl}(3,C)C^3=\{\sum_i D_i\boldsymbol{a}_i\,|\,D_i\in\mathfrak{sl}(3,C),\ \boldsymbol{a}_i\in C^3\}=C^3$.

証明 (1) $E_{ij}\in\mathfrak{sl}(3,C)$ を (i,j)-成分が 1, 他の成分が 0 の行列とする. さて, $E_{12}\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1$, $E_{13}\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1$ より (1) が分かる.

(2) $\{0\}\neq W\subset C^3$ を $\mathfrak{sl}(3,C)$-不変部分 C-加群とする. $\boldsymbol{e}_1\in W$ ならば $E_{i1}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_i$, $i=2,3$ より $W=C^3$ となる. さて, $0\neq\boldsymbol{a}\in W$ は $\mathfrak{sl}(3,C)$ で $\boldsymbol{e}_1$ に移る（上記(1)）ので $W=C^3$ になる.

(3)　$\mathfrak{sl}(3, C)C^3$ は C^3 の $\mathfrak{sl}(3, C)$-不変 C-部分加群であるから，(2)より $\mathfrak{sl}(3, C)C^3 = C^3$ である．

定理1.33　C-Lie 環 $\mathfrak{g}_2{}^C$ は単純である．したがって Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ も単純である．

証明　$\mathfrak{D}_1{}^C = \{D_{a,\iota} \mid \boldsymbol{a} \in \iota C^3\}$, $\mathfrak{D}_2{}^C = \{D_{b,\bar{\iota}} \mid \boldsymbol{b} \in \bar{\iota} C^3\}$, $\mathfrak{D}^C = \mathfrak{D}_1{}^C \oplus \mathfrak{D}_2{}^C$ とおくと，定理1.31より

$$\mathfrak{g}_2{}^C = \mathfrak{a}_2{}^C \oplus \mathfrak{D}_1{}^C \oplus \mathfrak{D}_2{}^C = \mathfrak{a}_2{}^C \oplus \mathfrak{D}^C$$

となる．$p : \mathfrak{g}_2{}^C \to \mathfrak{a}_2{}^C$, $q : \mathfrak{g}_2{}^C \to \mathfrak{D}^C$ を射影とする．さて，$\{0\} \neq \mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}_2{}^C$ の ideal とする．$p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}_2{}^C$ の ideal である．実際，$D_0 \in p(\mathfrak{a})$ とすると，$\boldsymbol{a} \in \iota C^3$, $\boldsymbol{b} \in \bar{\iota} C^3$ が存在して，$D_0 + D_{a,\iota} + D_{b,\bar{\iota}} \in \mathfrak{a}$ となる．任意の $D_0' \in \mathfrak{a}_2{}^C$ に対して

$$\mathfrak{a} \ni [D_0', D_0 + D_{a,\iota} + D_{b,\bar{\iota}}] = [D_0', D] + D_{D_0' a,\iota} + D_{-{}^tD_0' b,\bar{\iota}}$$

(補題1.27，定理1.29) となるので $[D_0', D] \in p(\mathfrak{a})$ である．

(1)　$\mathfrak{a}_2{}^C \cap \mathfrak{a} = \{0\}$, $\mathfrak{D}^C \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ のとき(この場合は起らない)．$\mathfrak{D}^C \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ であるから，$p|\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_2{}^C$ は単射である．$\{0\} \neq p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}_2{}^C$ の ideal で，$\mathfrak{a}_2{}^C$ は単純である ([3]定理11.5) から，$p(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_2{}^C$ である．よって $\dim_C \mathfrak{a} = \dim_C p(\mathfrak{a}) = \dim_C \mathfrak{a}_2{}^C = 8$ である．一方，$\mathfrak{a}_2{}^C \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ であるから，$q|\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{D}^C$ も単射である．よって $\dim_C \mathfrak{a} \leqq \dim_C \mathfrak{D}^C = 3+3 = 6$ となり，上記に矛盾する．

(2)　$\mathfrak{a}_2{}^C \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ のとき．$\mathfrak{a}_2{}^C$ は単純であるから，$\mathfrak{a}_2{}^C \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2{}^C$ となり，$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}_2{}^C$ である．一方

$$\mathfrak{a} \supset [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_2{}^C] \supset [\mathfrak{a}_2{}^C, \mathfrak{D}_i{}^C] = \mathfrak{D}_i{}^C, \quad i = 1, 2$$

となる．(最後の等号は，$[D_0, D_{a,\iota}] = D_{D_0 a,\iota}$, $[D_0, D_{b,\bar{\iota}}] = D_{-{}^tD_0 b,\bar{\iota}}$ (補題1.27と補題1.32 (3)) から分かる)．よって $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}_2{}^C \oplus \mathfrak{D}_1{}^C \oplus \mathfrak{D}_2{}^C = \mathfrak{g}_2{}^C$ となり $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_2{}^C$ を得る．

(3)　$\mathfrak{D}_C{}^C \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ のとき．$0 \neq D_{a,\iota} + D_{b,\bar{\iota}} \in \mathfrak{D}^C \cap \mathfrak{a}$ をとる．$\boldsymbol{a} \neq 0$ ならば，$\mathfrak{a}_2{}^C$ の作用により $D_{\iota e_1,\iota} + D_{b',\bar{\iota}} \in \mathfrak{a}$ となる (補題1.32)．$\boldsymbol{b}' = 0$ ならば，補題1.30より $0 \neq [D_{\iota e_1,\iota}, D_{\bar{\iota} e_1 \bar{\iota}}] = D_{\iota e_1, \bar{\iota} e_1} \in \mathfrak{a}_2{}^C \cap \mathfrak{a}$ となり，(2)に帰着される．$\boldsymbol{b}' \neq 0$ ならば $D_{\iota e_1 \iota}$ との Lie 積をとると $0 \neq D_{\iota e_1 b} \in \mathfrak{a}$ (補題1.30 (3)) となり，やはり(2)に帰着される．以上で $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_2{}^C$ となり，$\mathfrak{g}_2{}^C$ の単純性が示された．

補題1.34　$\mathfrak{g}_2{}^C$ の元 D は $D = \sum_i D_{a_i, b_i}$, $a_i, b_i \in \mathfrak{C}^C$ と表される．

証明　$\mathfrak{a}=\{\sum_i D_{a_i,b_i}\,|\,a_i, b_i\in\mathfrak{C}^C\}$ は $\mathfrak{g}_2{}^C$ の ideal である(補題1.27)．$\mathfrak{g}_2{}^C$ は単純である（定理1.33）から，$\mathfrak{a}=\mathfrak{g}_2{}^C$ となる．

12　$\mathfrak{g}_2{}^C$ の Killing 形式

補題1.35　$a, b, c, d\in\mathfrak{C}^C$ に対し，

$$(D_{a,b}c, d)=(D_{c,d}a, b)$$

が成り立つ．

証明　$a, b, c, d\in\mathfrak{C}_0{}^C$ と仮定してよい．$([L_a, L_b]c, d)=([L_c, L_d]a, b)$ が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}([L_a, L_b]c, d)&=(a(bc)-b(ac), d)=-(bc, ad)+(ac, bd)\\&=-(\overline{bc}, \overline{ad})+(\overline{ac}, \overline{bd})=-(cb, da)+(ca, db)\\&=(c(da)-d(ca), b)=([L_c, L_d]a, b)\end{aligned}$$

である．同様に，$([L_a, R_b]c, d)=([L_c, R_d]a, b)$, $([R_a, R_b]c, d)=([R_c, R_d]a, b)$ が成り立つので，補題を得る．

定義　$\mathfrak{g}_2{}^C$ に内積 $(D_1, D_2)_2$ を

$$(D, D_{a,b})_2=(Da, b),\quad D\in\mathfrak{g}_2{}^C,\ a, b\in\mathfrak{C}^C$$

を満たすように定義する．もっと詳しくいうならば，$D_1=\sum_i D_{a_i,b_i}$，$D_2=\sum_j D_{c_j,d_j}$，$a_i, b_i, c_j, d_j\in\mathfrak{C}^C$ で表す（補題1.34）とき

$$(D_1, D_2)_2=\sum_{i,j}(D_{a_i,b_j}c_j, d_j)=\sum_{i,j}(D_{c_j,d_j}a_i, b_i)$$

で定義する(補題1.35)．(この定義は D_1，D_2 の表示によらず，かつ対称である：$(D_1, D_2)_2=(D_2, D_1)_2$（補題1.35))．

補題1.36　$\mathfrak{g}_2{}^C$ の内積 $(D_1, D_2)_2$ は $\mathfrak{g}_2{}^C$-不変である：

$$([D, D_1], D_2)_2+(D_1, [D, D_2])_2=0,\quad D, D_i\in\mathfrak{g}_2{}^C.$$

証明　$D_1=D_{a,b}$，$D_2=D_{c,d}$，$a, b, c, d\in\mathfrak{C}^C$ のときに示せば十分である(補題1.34)．さて

$$([D, D_{a,b}], D_{c,d})_2=([D, D_{a,b}]c, d)$$

$$
\begin{aligned}
&=(DD_{a,b}c-D_{a,b}Dc,\ d)\\
&=(D,\ D_{D_{a,b}c,d})_2-(D_{a,b},\ D_{Dc,d})_2\\
&=-(D,\ D_{d,D_{a,b}c})_2-(D_{a,b},\ D_{Dc,d})_2 \quad (\text{補題}1.26)\\
&=-(Dd,\ D_{a,b}c)-(D_{a,b},\ D_{Dc,d})_2\\
&=-(D_{a,b},\ D_{c,Dd})_2-(D_{a,b},\ D_{Dc,d})_2\\
&=-(D_{a,b},[D,\ D_{c,d}])_2 \quad (\text{補題}1.27)
\end{aligned}
$$

となる．

$\mathfrak{g}_2{}^C$ において，次の略記号

$$D_{ij}=D_{e_i,e_j}, \quad i,j=1,2,\cdots,7$$

を用いる．D_{ij} の $\mathfrak{C}^C$ への作用は次のようである．

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
D_{12}	$4e_2$	$-4e_1$	0	$-2e_7$	$-2e_6$	$2e_5$	$2e_4$
D_{13}	$4e_3$	0	$-4e_1$	$-2e_6$	$2e_7$	$2e_4$	$-2e_5$
D_{14}	$4e_4$	$2e_7$	$2e_6$	$-4e_1$	0	$-2e_3$	$-2e_2$
D_{15}	$4e_5$	$2e_6$	$-2e_7$	0	$-4e_1$	$-2e_2$	$2e_3$
D_{16}	$4e_6$	$-2e_5$	$-2e_4$	$2e_3$	$2e_2$	$-4e_1$	0
D_{17}	$4e_7$	$-2e_4$	$2e_5$	$2e_2$	$-2e_3$	0	$-4e_1$
D_{23}	0	$4e_3$	$-4e_2$	$-2e_5$	$2e_4$	$-2e_7$	$2e_6$
D_{24}	$-2e_7$	$4e_4$	$2e_5$	$-4e_2$	$-2e_3$	0	$2e_1$
D_{25}	$-2e_6$	$4e_5$	$-2e_4$	$2e_3$	$-4e_2$	$2e_1$	0
D_{26}	$2e_5$	$4e_6$	$2e_7$	0	$-2e_1$	$-4e_2$	$-2e_3$
D_{27}	$2e_4$	$4e_7$	$-2e_6$	$-2e_1$	0	$2e_3$	$-4e_2$
D_{34}	$-2e_6$	$-2e_5$	$4e_4$	$-4e_3$	$2e_2$	$2e_1$	0
D_{35}	$2e_7$	$2e_4$	$4e_5$	$-2e_2$	$-4e_3$	0	$-2e_1$
D_{36}	$2e_4$	$-2e_7$	$4e_6$	$-2e_1$	0	$-4e_3$	$2e_2$
D_{37}	$-2e_5$	$2e_6$	$4e_7$	0	$2e_1$	$-2e_2$	$-4e_3$
D_{45}	0	$-2e_3$	$2e_2$	$4e_5$	$-4e_4$	$-2e_7$	$2e_6$
D_{46}	$-2e_3$	0	$2e_1$	$4e_6$	$2e_7$	$-4e_4$	$-2e_5$
D_{47}	$-2e_2$	$2e_1$	0	$4e_7$	$-2e_6$	$2e_5$	$-4e_4$
D_{56}	$-2e_2$	$2e_1$	0	$-2e_7$	$4e_6$	$-4e_5$	$2e_4$
D_{57}	$2e_3$	0	$-2e_1$	$2e_6$	$4e_7$	$-2e_4$	$-4e_5$
D_{67}	0	$-2e_3$	$2e_2$	$-2e_5$	$2e_4$	$4e_7$	$-4e_6$

さらに

$$L_1=\frac{1}{\sqrt{12}}(D_{23}-D_{45}), \quad L_1{}'=\frac{1}{2}D_{67},$$

$$L_2=\frac{1}{\sqrt{12}}(D_{57}-D_{64}),\quad L_2'=\frac{1}{2}D_{31},$$

$$L_3=\frac{1}{\sqrt{12}}(D_{47}-D_{56}),\quad L_3'=\frac{1}{2}D_{12},$$

$$L_4=\frac{1}{\sqrt{12}}(D_{26}-D_{73}),\quad L_4'=\frac{1}{2}D_{51},$$

$$L_5=\frac{1}{\sqrt{12}}(D_{72}-D_{63}),\quad L_5'=\frac{1}{2}D_{14},$$

$$L_6=\frac{1}{\sqrt{12}}(D_{35}-D_{42}),\quad L_6'=\frac{1}{2}D_{71},$$

$$L_7=\frac{1}{\sqrt{12}}(D_{25}-D_{34}),\quad L_7'=\frac{1}{2}D_{16}$$

とおく．

補題1.37 (1) $L_1, \cdots, L_7, L_1', \cdots, L_7'$ は $\mathfrak{g}_2{}^C$ の内積 $(D_1, D_2)_2$ に関して正規直交 C-基である．

(2) $\mathfrak{g}_2{}^C$ における ad L_1 の作用は次式で与えられる．

$$[L_1, L_2]=\sqrt{3}L_3,\quad [L_1, L_3]=-\sqrt{3}L_2,\quad [L_1, L_4]=\sqrt{3}L_5,$$
$$[L_1, L_5]=-\sqrt{3}L_4,\quad [L_1, L_6]=-\sqrt{12}L_7,\quad [L_1, L_7]=\sqrt{3}L_6,$$
$$[L_1, L_1']=0,\quad [L_1, L_2']=\sqrt{3}L_3',\quad [L_1, L_3']=-\sqrt{3}L_2',$$
$$[L_1, L_4']=-\sqrt{3}L_5',\quad [L_1, L_5']=\sqrt{3}L_4',\quad [L_1, L_6']=0$$
$$[L_1, L_7']=0.$$

証明 (1)は容易である．(2) 例えば

$$[L_1, L_2]=\frac{1}{12}[D_{23}-D_{45}, D_{57}-D_{64}]$$
$$=\frac{1}{12}([D_{23}, D_{57}]-[D_{23}, D_{64}]-[D_{45}, D_{57}]+[D_{45}, D_{64}])$$
$$=\frac{1}{12}(D_{D_{23}e_5,e_7}+D_{e_5,D_{23}e_7}-D_{D_{23}e_6,e_4}-D_{e_6,D_{23}e_4}$$
$$-D_{D_{45}e_5,e_7}-D_{e_5,D_{45}e_7}+D_{D_{45}e_6,e_4}+D_{e_6,D_{45}e_4})\quad (\text{補題1.27})$$
$$=\frac{1}{12}(D_{2e_4,e_7}+D_{e_5,2e_6}-D_{-2e_7,e_4}-D_{e_6,-2e_5}$$
$$-D_{-4e_4,e_7}-D_{e_5,2e_6}+D_{-2e_7,e_4}+D_{e_6,4e_5})$$
$$=\frac{1}{12}(2D_{47}+2D_{56}+2D_{74}+2D_{65}+4D_{47}-2D_{56}-2D_{74}+4D_{65})$$

$$=\frac{6}{12}(D_{47}-D_{56})=\sqrt{3}L_3$$

のようである．

定理1.38　$\mathfrak{g}_2{}^C$ の Killing 形式 B_2 は

$$B_2(D_1,D_2)=-48(D_1,D_2)_2=4\mathrm{tr}(D_1D_2),\quad D_i\in\mathfrak{g}_2{}^C$$

で与えられる．

証明　$\mathfrak{g}_2{}^C$ は単純である（定理1.33）から，$\kappa,\kappa'\in C$ が存在して

$$B_2(D_1,D_2)=\kappa(D_1,D_2)_2=\kappa'\mathrm{tr}(D_1D_2),\quad D_i\in\mathfrak{g}_2{}^C$$

となる（補題1.36，［3］命題12.3）．κ，κ' を求めるために，$D_1=D_2=L_1$ とおく．

$$[L_1,[L_1,L_2]]=[L_1,\sqrt{3}L_3]=-3L_2,$$
$$[L_1,[L_1,L_6]]=[L_1,-\sqrt{12}L_7]=-12L_6,$$
$$[L_1,[L_1,L_2{}']]=[L_1,\sqrt{3}L_3{}']=-3L_2{}'$$

等の計算より

$$B_2(L_1,L_1)=\mathrm{tr}((\mathrm{ad}\,L_1)^2)=-3\times4-12\times2-3\times4=-48$$

である．一方，$(L_1,L_1)_2=1$（補題1.37）より $\kappa=-48$ を得る．次に

$$L_1L_1e_1=\frac{1}{\sqrt{12}}L_10=0,\qquad \text{同様に } L_1L_1e_i=0,\ \ i=6,7,$$
$$L_1L_1e_2=\sqrt{3}L_1e_3=-3e_2,\quad \text{同様に } L_1L_1e_i=-3e_i,\ \ i=3,4,5$$

であるから

$$\mathrm{tr}(L_1L_1)=-3\times4=-12$$

である．よって $\kappa'=4$ である．

13　$\mathfrak{g}_2{}^C$ の root 系

定理1.39　C-Lie 環 $\mathfrak{g}_2{}^C$ の階数は 2 である．$\mathfrak{g}_2{}^C$ のある（Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に関する）root 系は

$$\pm(\lambda_1-\lambda_2),\quad \pm(\lambda_1-\lambda_3),\quad \pm(\lambda_2-\lambda_3),\quad \pm\lambda_1,\quad \pm\lambda_2,\quad \pm\lambda_3$$

$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0)$ である．

証明

$$\mathfrak{g}_2{}^C=\mathfrak{a}_2{}^C\oplus\mathfrak{D}_1{}^C\oplus\mathfrak{D}_2{}^C$$

の分解（定理1.31）を用いる．

$$\mathfrak{h}=\left\{ H=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \lambda_i \in C \right\}$$

は $\mathfrak{sl}(3, C)=\mathfrak{a}_2{}^C$ の Cartan 部分環である（[3]定理13.1）（さらに $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}_2{}^C$ の Cartan 部分環にもなる）．

I　$\mathfrak{a}_2{}^C$ の root　$\pm(\lambda_1-\lambda_2)$，$\pm(\lambda_1-\lambda_3)$，$\pm(\lambda_2-\lambda_3)$（[3]定理13.1）は $\mathfrak{g}_2{}^C$ の root である．

II　$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ を C^3 の標準基として

$$[H, D_{\iota e_k, \iota}]=D_{H\iota e_k, \iota}=D_{\lambda_k \iota e_k, \iota}=\boldsymbol{\lambda}_k D_{\iota e_k, \iota}$$

$$[H, D_{\bar{\iota} e_k, \bar{\iota}}]=D_{-{}^tH\bar{\iota} e_k, \bar{\iota}}=D_{-\lambda_k \bar{\iota} e_k, \bar{\iota}}=-\lambda_k D_{\bar{\iota} e_k, \bar{\iota}}$$

より $\pm\lambda_1$，$\pm\lambda_2$，$\pm\lambda_3$ も $\mathfrak{g}_2{}^C$ の root である．root の個数 $=12$ であるからこれが root のすべてである．

定理1.40　$\mathfrak{g}_2{}^C$ の root 系（定理1.39）において

$$\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2, \quad \alpha_2=\lambda_2$$

は基本 root 系である．$\mathfrak{g}_2{}^C$ の Dynkin 図形は

$$\underset{\alpha_1}{\circ}\Rrightarrow\underset{\alpha_2}{\circ}$$

である．

証明

$$\lambda_1=\alpha_1+\alpha_2, \quad \lambda_2=\alpha_2, \quad -\lambda_3=\alpha_1+2\alpha_2,$$

$$\lambda_1-\lambda_2=\alpha_1, \quad \lambda_1-\lambda_3=2\alpha_1+3\alpha_2, \quad \lambda_2-\lambda_3=\alpha_1+3\alpha_2$$

と表せるから，$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ は基本 root 系である．（以下[3]13章の記号を用いる）．$\mathfrak{g}_2{}^C$ の Killing 形式 B_2 は $B_2(D_1, D_2)=4\mathrm{tr}(D_1 D_2)$ であった（定理1.38）から，$H=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k E_k$，$H'=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k' E_k \in \mathfrak{h}$ に対し

$$B_2(H, H')=8\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\lambda_k'$$

となる．実際，$H(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=H\boldsymbol{a}-H\boldsymbol{b}$（定理1.29）より容易に求められる．root $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ に対応する元 $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2} \in \mathfrak{h}$ $(B_2(H_\alpha, H)=\alpha(H), H \in \mathfrak{H})$ は

$$H_{\alpha_1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{\alpha_2}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．実際，$H_\alpha=\sum_{k=1}^{3} b_k E_k$ とおくと，$H=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k E_k$ に対して

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1-\lambda_2\\ \lambda_2\end{array}\right\}=\alpha(H)=B_2(H_\alpha, H)=8(b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+b_3\lambda_3)$$
$$=8(b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+(b_1+b_2)(\lambda_1+\lambda_2))$$
$$=8((2b_1+b_2)\lambda_1+(b_1+2b_2)\lambda_2)$$

となる．これより $b_1=\frac{1}{8}$，$b_2=-\frac{1}{8}$；$b_1=-\frac{1}{24}$，$b_2=\frac{1}{12}$ となり，H_{α_1}，H_{α_2} が求められる．よって

$$(\alpha_1, \alpha_1)=B_2(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_1})=8\frac{1}{8}\frac{1}{8}(1+1)=\frac{1}{4},$$

$$(\alpha_2, \alpha_2)=B_2(H_{\alpha_2}, H_{\alpha_2})=8\frac{1}{24}\frac{1}{24}(1+4+1)=\frac{1}{12},$$

$$(\alpha_1, \alpha_2)=B_2(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2})=8\frac{1}{8}\frac{1}{24}(-1-2)=-\frac{1}{8}$$

となる．これより容易に Dynkin 図形を描くことができる．

14　単連結複素 Lie 群 $G_2{}^C$

定義　複素 Cayley 代数 $\mathfrak{C}^C$ の自己同型群を $G_2{}^C$ で表す：

$$G_2{}^C=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{C}^C)\,|\,\alpha(xy)=(\alpha x)(\alpha y)\}.$$

補題1.41　$\alpha\in G_2{}^C$ は $\mathfrak{C}^C$ の内積を不変にする：

$$(\alpha x, \alpha y)=(x, y),\quad x, y\in\mathfrak{C}^C.$$

証明　（定理1.1参照）　まず $\alpha\in G_2{}^C$ は

$$\overline{\alpha x}=\alpha\overline{x},\quad x\in\mathfrak{C}^C$$

を満たすことを示そう．そのためには

$$\alpha 1=1,\quad \overline{\alpha e_i}=-\alpha e_i,\quad i=1, 2, \cdots, 7$$

を示せば十分である．さて，$\alpha x=(\alpha 1)(\alpha x)$ がすべての $x\in\mathfrak{C}^C$ で成り立つので $\alpha 1=1$ である．$i\neq 0$ のとき，$(\alpha e_i)(\alpha e_i)=\alpha(e_ie_i)=\alpha(-1)=-1$ となる．$\alpha e_i=a$ とおく．$N(a)=a\overline{a}$ とおくと $aa=-1$ より $N(a)N(a)=1$ となるから，$N(a)=\pm 1$ である．$N(a)=-1$ とすると，$\overline{a}=-aa\overline{a}=-aN(a)=a$ より $a\in C$ となるが，$a^2=-1$ より $a=\pm i$ である．このとき，$\alpha(e_i)=\pm i=\pm\alpha(i)$ よ

り $e_i=\pm i$ となり矛盾する．よって，$N(a)=1$ である．$\overline{a}=-aa\overline{a}=-aN(a)=-a$，すなわち $\overline{\alpha(e_i)}=-\alpha(e_i)$ を得る．$\overline{\alpha x}=\alpha\overline{x}$ が分かると $(\alpha x,\alpha y)=(x,y)$ の証明は定理1.1と同じである．

$\mathfrak{C}^C$ に正値 Hermite 内積 $\langle x,y\rangle$ を

$$\langle x,y\rangle=(\tau x,y)$$

で定義する．$\alpha\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{C}^C)$ のこの内積に関する共役転置写像を α^* で表わす：$\langle\alpha^*x,y\rangle=\langle x,\alpha y\rangle$，$x,y\in\mathfrak{C}^C$．

補題1.42 (1) $\alpha\in {G_2}^C$ ならば $\alpha^*=\tau\alpha^{-1}\tau\in {G_2}^C$ である．

(2) $\alpha\in G_2$ に対し，その複素化写像 $\alpha^C:\mathfrak{C}^C\to\mathfrak{C}^C$ は $\alpha^C\in {G_2}^C$ であるから，α と α^C を同一視して G_2 を ${G_2}^C$ の部分群とみなす：$G_2\subset {G_2}^C$．さて，$\alpha\in {G_2}^C$ が $\alpha\in G$ になるための必要十分条件は $\tau\alpha=\alpha\tau$ である：

$$G_2=\{\alpha\in {G_2}^C\mid \tau\alpha=\alpha\tau\}.$$

証明 (1) $\langle\alpha^*x,y\rangle=\langle x,\alpha y\rangle=(\tau x,\alpha y)=(\alpha^{-1}\tau x,y)$ (補題1.41) $=\langle\tau\alpha^{-1}\tau x,y\rangle$，$x,y\in\mathfrak{C}^C$ より $\alpha^*=\tau\alpha^{-1}\tau\in {G_2}^C$ である．

(2) $\alpha\in {G_2}^C$ が $\tau\alpha=\alpha\tau$ ならば，$x\in\mathfrak{C}$ に対し $\tau\alpha x=\alpha\tau x=\alpha x$ より $\alpha x\in\mathfrak{C}$ となるので，α は $\mathfrak{C}$ の $\boldsymbol{R}$-同型写像 α' を誘導し，$\alpha'\in G_2$ である．そして $\alpha=(\alpha')^C$ となっている．

定理1.43 Lie 群 ${G_2}^C$ の極分解は

$${G_2}^C\simeq G_2\times\boldsymbol{R}^{14}$$

で与えられる．したがって，${G_2}^C$ は単連結な G_2 型複素 Lie 群である．

証明 ${G_2}^C$ は $\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{C}^C)=GL(8,C)$ の代数部分群であり，$\alpha\in {G_2}^C$ ならば $\alpha^*\in {G_2}^C$ である（補題1.42）．よって Chevalley の補題（[3]定理6.3）より

$${G_2}^C\simeq({G_2}^C\cap U(\mathfrak{C}^C))\times\boldsymbol{R}^d=G_2\times\boldsymbol{R}^d\quad（補題1.42），$$

$d=\dim {G_2}^C-\dim G_2=2\times 14-14=14$ となる．G_2 は単連結である（定理1.5）から，${G_2}^C$ も単連結である．${G_2}^C$ の Lie 環は ${\mathfrak{g}_2}^C$ であるから，結局 ${G_2}^C$ は単連結 G_2 型複素 Lie 群であることが分かった．

15　スピノル群 $Spin(7)$

$\alpha\in SO(7)$ に 3 対原理を用いると，$\tilde{\alpha}, \alpha'\in SO(8)$ が存在して

$$(\alpha x)(\tilde{\alpha} y)=\alpha'(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C} \tag{i}$$

が成り立つ．$x=1$ とおくと，$\tilde{\alpha} y=\alpha' y$ より $\tilde{\alpha}=\alpha'$ となるので (i) は

$$(\alpha x)(\tilde{\alpha} y)=\tilde{\alpha}(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C} \tag{ii}$$

となる．逆に，α, $\tilde{\alpha}\in SO(8)$ に対し (ii) が成り立つとするとき，$x=1$ とおくと $(\alpha 1)(\tilde{\alpha} y)=(\tilde{\alpha} y)$ より $\alpha 1=1$，すなわち $\alpha\in SO(7)$ となる．

定義　$SO(8)$ の部分群 $\tilde{B}_3$ を

$$\tilde{B}_3=\left\{ \tilde{\alpha}\in SO(8) \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{ある } \alpha\in SO(7) \text{ が存在して} \\ (\alpha x)(\tilde{\alpha} y)=\tilde{\alpha}(xy),\ x, y\in\mathfrak{C} \text{ が成り立つ}\end{array} \right\}$$

で定義する．$\tilde{B}_3$ は compact Lie 群である．

定理1.44　$$\tilde{B}_3/G_2\simeq S^7.$$

特に $\tilde{B}_3$ は単連結である．また，$\tilde{B}_3\cap SO(7)=G_2$ が成り立つ．

証明　$S^7=\{a\in\mathfrak{C} \mid |a|=1\}$ とおくと，S^7 は 7 次元球面である．$\tilde{B}_3$ は $SO(8)$ の部分群であるから，$\tilde{B}_3$ は S^7 に働く．この働き方が推移的であることを示そう．

$b_0\in S^7$ を与える．

$a_4\in S^7$ を $(a_4, 1)=0$ を満たす任意の元とする．

$a_1\in S^7$ を $(a_1, 1)=(a_1, a_4)=0$ を満たす任意の元とする．

$a_5\in S^7$ を $a_5 b_0=a_1(a_4 b_0)$ より定まる元とする．より詳しくいえば，$a_5=(a_1(a_4 b_0))\,\overline{b}_0$ とおくと $a_5\in S^7$ であって $(a_5, 1)=(a_5, a_4)=(a_5, a_1)=0$ を満たしている．

$a_2\in S^7$ を $(a_2, 1)=(a_2, a_4)=(a_2, a_1)=(a_2, a_5)=0$ を満たす任意の元とする．

$a_6, a_3, a_7\in S^7$ をそれぞれ $a_6 b_0=a_4(a_2 b_0)$，$a_3 b_0=a_1(a_2 b_0)$，$a_7 b_0=a_3(a_4 b_0)$ より定まる元とする．

このとき，$a_0=1, a_1, a_2, \cdots, a_7$ は $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基である．実際，$|a_i|=1$ は明らかであるが $(a_i, a_j)=0$，$i\neq j$ を確かめなければならないが，ここでは次の 3 つを例として示しておくにとどめる．

$$(a_4, a_5)=(a_4 b_0, a_5 b_0)=(a_4 b_0, a_1(a_4 b_0))=-(a_4 b_0, a_4(a_1 b_0))$$

$$=-(b_0, a_1b_0)=-(1, a_1)=0,$$

$$(a_1, a_6)=(a_1b_0, a_6b_0)=(a_1b_0, a_4(a_2b_0))=-(a_4(a_1b_0), a_2b_0)$$

$$=(a_1(a_4b_0), a_2b_0)=(a_5b_0, a_2b_0)=(a_5, a_2)=0,$$

$$(a_4, a_3)=(a_4b_0, a_3b_0)=(a_4b_0, a_1(a_2b_0))=-(a_1(a_4b_0), a_2b_0)$$

$$=-(a_5b_0, a_2b_0)=-(a_5, a_2)=0$$

さて，$e_0=1$，$e_1, \cdots, e_7$；$a_0=1$，$a_1, \cdots, a_7$ は共に $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基であるから，$\boldsymbol{R}$-線型写像 $\alpha : \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ を

$$\alpha e_i=a_i, \qquad i=0, 1, \cdots, 7$$

を満たすようにつくると $\alpha\in O(7)$ である．さらに α は

$$(\alpha x)((\alpha y)b_0)=(\alpha(xy))b_0, \quad x, y\in\mathfrak{C} \tag{i}$$

を満たしている．実際，これを示すには

$$(\alpha e_i)((\alpha e_j)b_0)=(\alpha(e_ie_j))b_0, \quad i, j=0, 1, \cdots, 7$$

が成り立つことを確かめればよい．これも数多く確かめなければならないが，次の 2 つを例としてあげておくにとどめる．

$$(\alpha e_4)((\alpha e_5)b_0)=a_4(a_5b_0)=a_4(a_1(a_4b_0))=-a_4(a_4(a_1b_0))$$

$$=a_1b_0=\alpha(e_1)b_0=\alpha(e_4e_5)b_0,$$

$$(\alpha e_1)((\alpha e_6)b_0)=a_1(a_6b_0)=a_1(a_4(a_2b_0))=-a_4(a_1(a_2b_0))$$

$$=-a_4(a_3b_0)=a_3(a_4b_0)=a_7b_0=\alpha(e_7)b_0=\alpha(e_1e_6)b_0.$$

さて

$$b_i=a_ib_0, \quad i=0, 1, \cdots, 7$$

とおくと，$b_0, b_1, \cdots, b_7$ は $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基である．$\boldsymbol{R}$-線型写像 $\tilde{\alpha} : \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ を

$$\tilde{\alpha} e_i=b_i, \quad i=0, 1, \cdots, 7$$

を満たすようにつくると $\tilde{\alpha}\in O(8)$ である．そして $\tilde{\alpha}x=(\alpha x)b_0$ となるから，(i)より

$$(\alpha x)(\tilde{\alpha} y)=\tilde{\alpha}(xy), \quad x, y\in\mathfrak{C} \tag{ii}$$

が成り立つ．$\alpha\in O(7)$，$\tilde{\alpha}\in O(8)$ が (ii) を満たすので $\alpha\in SO(7)$，$\tilde{\alpha}\in SO(8)$ である（補題1.9）．よって $\tilde{\alpha}\in\tilde{B}_3$ であり，かつ $\tilde{\alpha}1=b_0$ である．以上で $\tilde{B}_3$ が S^7 に推移的に働くことが示された．$1\in S^7$ における $\tilde{B}_3$ の等方群は G_2 である．実際，$\tilde{\alpha}\in\tilde{B}_3$ が $\tilde{\alpha}1=1$ を満たせば $\alpha=\tilde{\alpha}$ となるので，$\tilde{\alpha}\in G_2$ である．逆に $\alpha\in G_2$ は $\alpha\in\tilde{B}_3$，$\alpha 1=1$ である．よって同相 $\tilde{B}_3/G_2\simeq S^7$ を得る．

定理1.45 $\qquad \tilde{B}_3\cong Spin(7).$

証明　$\alpha \in SO(7)$，$\tilde{\alpha} \in \tilde{B}_3$ が 3 対原理

$$(\alpha x)(\tilde{\alpha} y) = \tilde{\alpha}(xy), \quad x, y \in \mathfrak{C}$$

の関係にあるとして，写像 $p: \tilde{B}_3 \to SO(7)$ を $p(\tilde{\alpha}) = \alpha$ で定義する．p は群準同型写像である．p は全射であり，$\mathrm{Ker}\, p = \{1, -1\} = Z_2$ であることを 3 対原理が教えている．つぎに p が連続写像であることを示そう．補題1.8より

$$\alpha(xy) = (\tilde{\alpha} x)\overline{(\overline{\tilde{\alpha}\, y})}, \quad x, \ y \in \mathfrak{C}$$

が成り立つ．これより，$\mathfrak{C}$ の $\boldsymbol{R}$-基 $e_0, e_1, \cdots, e_7$ を用いて，$\tilde{\alpha}$，α を行列表示するとき，行列 α の各成分は $\tilde{\alpha}$ の成分の多項式であることが分かる．(例えば，α の第 1 列は $\alpha e_1 = (\tilde{\alpha} e_2)\overline{(\tilde{\alpha}\, \overline{e}_3)}$ である)．よって p は連続である．以上より群同型

$$\tilde{B}_3 / Z_2 \cong SO(7)$$

を得る．これより，$\tilde{B}_3$ は $SO(7)$ の連結な（定理1.44）被覆群として $Spin(7)$ に同型である．

16　スピノル群 $Spin(8)$

定義　直積群 $SO(8) \times SO(8) \times SO(8)$ の部分群 $\tilde{D}_4$ を

$$\tilde{D}_4 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in SO(8) \times SO(8) \times SO(8) \,|\, (\alpha_1 x)(\alpha_2 y) = \overline{\alpha_3(\overline{xy})}, x, y \in \mathfrak{C}\}$$

で定義する．$\tilde{D}_4$ は compact Lie 群である．

$\tilde{D}_4$ は，$\tilde{\alpha} \in Spin(7) = \tilde{B}_3$ と $(\alpha, \tilde{\alpha}, \kappa\tilde{\alpha}) \in \tilde{D}_4$ を同一視することにより，$Spin(7)$ を部分群として含んでいる．

命題1.46　　$\tilde{D}_4 / Spin(7) \simeq S^7$.

特に $\tilde{D}_4$ は単連結である．

証明　$S^7 = \{a \in \mathfrak{C} \,|\, |a| = 1\}$ とする．$\tilde{D}_4$ の S^7 への作用を

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)a = \alpha_1 a, \quad a \in S^7$$

で定義する．この働き方は推移的である．実際，$a \in S^7$ を与える．$SO(8)$ は S^7 に推移的に働く（[3]定理5.10）から，$\alpha_1 1 = a$ となる $\alpha_1 \in SO(8)$ が存在する．この α_1 に対して，3 対原理 $(\alpha_1 x)(\alpha_2 y) = \overline{\alpha_3(\overline{xy})}$ を満たす $\alpha_2, \alpha_3 \in SO(8)$ をとると，$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \tilde{D}_4$ であって $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)1 = a$ となる．よって推移的である．$1 \in S^7$ における $\tilde{D}_4$ の等方群は $Spin(7)$ である．実際，$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)1 = 1$ ならば，

$\alpha_1 1=1$ より $\alpha_1\in SO(7)$ となるからである．よって同相 $\widetilde{D}_4/Spin(7)\simeq S^7$ を得る．

定理1.47 $$\widetilde{D}_4\cong Spin(8).$$

証明 写像 $p:\widetilde{D}_4\to SO(8)$ を $p(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\alpha_1$ で定義する．p は連続な群同型写像である．p が全射であり，$\mathrm{Ker}\,p=\{(1,1,1),(1,-1,-1)\}=Z_2$ であることを 3 対原理が教えている．よって群同型
$$\widetilde{D}_4/Z_2\cong SO(8)$$
を得る．これより $\widetilde{D}_4$ は $SO(8)$ の連結な（命題1.46）被覆群として $Spin(8)$ に同型である．

定理1.48 群 $Spin(8)$ の中心 $z(Spin(8))$ は
$$\begin{aligned}z(Spin(8))&=\{(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1)\}\\&=\{(1,1,1),(1,-1,-1)\}\times\{(1,1,1),(-1,-1,1)\}=\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2\end{aligned}$$
である．

証明 $SO(8)$ の中心が $\{1,-1\}$ であることに 3 対原理を用いると分かる．

定理1.19，補題1.23の事実を $Spin(8)$ で実現してみよう．

定理1.49 群自己同型写像 $\kappa,\ \pi,\ \nu: Spin(8)\to Spin(8)$ を
$$\kappa(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\kappa\alpha_1,\kappa\alpha_3,\kappa\alpha_2),$$
$$\pi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\kappa\alpha_3,\kappa\alpha_2,\kappa\alpha_1),$$
$$\nu(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)$$
（右辺の κ の定義は，$\kappa: SO(8)\to SO(8)$，$(\kappa\alpha)x=\overline{\alpha\overline{x}}$，$x\in\mathfrak{C}$ である）と定義すると
$$\kappa^2=1,\quad \pi^2=1,\quad \nu^3=1,\quad \nu=\pi\kappa$$
の関係がある．$Spin(8)$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(Spin(8))$ において，κ，π により生成される部分群 $\mathfrak{S}_3$ は 3 次の対称群 S_3 に同型である．そして
$$\begin{aligned}Spin(7)&=\{\alpha\in Spin(8)\mid \kappa\alpha=\alpha\},\\G_2&=\{\alpha\in Spin(8)\mid \nu\alpha=\alpha,\ \pi\alpha=\alpha\}\\&=\{\alpha\in Spin(8)\mid \text{すべての }\lambda\in\mathfrak{S}_3\text{ に対し }\lambda\alpha=\alpha\}\end{aligned}$$

$$= \{ \alpha \in Spin(8) \mid \nu\alpha = \alpha \}$$
$$= \{ \alpha \in Spin(7) \mid \pi\alpha = \alpha \}$$

が成り立つ．さらに，群同型

$$Spin(8)/\{(1,1,1),(-1,-1,1)\} \cong Spin(8)/\{(1,1,1),(1,-1,-1)\}$$

すなわち

$$SO(8) \cong Ss(8)$$

を得る（[3]定理9.11の注意参照）．

証明　前半の $G_2 = \{ \alpha \in Spin(8) \mid \nu\alpha = \alpha \}$ を示そう．$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in Spin(8)$ が $\nu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とすると $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ となるので，これを α とおくと

$$(\alpha x)(\alpha y) = (\kappa\alpha)(xy), \quad x, y \in \mathfrak{C} \qquad \text{(i)}$$

となる．$p = \alpha 1$ とおくと $|p| = 1$ である．(i)において，それぞれ $x = 1$，$y = 1$ とおくと，$p(\alpha y) = (\kappa\alpha)y$，$(\alpha x)p = (\kappa\alpha)x$ となるので，この2式から

$$p(\alpha x) = (\alpha x)p, \quad x \in \mathfrak{C}$$

となる．これより $p \in \boldsymbol{R}$ となる．$|p| = 1$ より $p = \pm 1$ である．$p = -1$ のとき，(i)において $x = y = 1$ とおくと $(-1)(-1) = -1$ となり矛盾する．よって $p = 1$ であり，$\alpha = \kappa\alpha$ を得て，$\alpha \in G_2$ となる．後半の $SO(8) \cong Ss(8)$ は，自己同型写像 $\nu^2 : Spin(8) \to Spin(8)$ が $\nu^2(-1,-1,1) = (1,-1,-1)$ を満たすからである．

付録17　非 compact G_2 型例外 Lie 群 $G_{2(2)}$

$\mathfrak{C}' = \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}e'$（$\boldsymbol{H}$ は四元数体）において，積，内積，共役元をそれぞれ

$$(m + ae')(n + be') = (mn + \overline{b}a) + (a\overline{n} + bm)e',$$
$$(m + ae', n + be')' = (m, n) - (a, b),$$
$$\overline{m + ae'} = \overline{m} - ae'$$

で定義する．$\mathfrak{C}'$ を **split Cayley 代数**という．$\mathfrak{C}'$ は

$$(\mathfrak{C}^C)_{\tau\gamma} = \{ x \in \mathfrak{C}^C \mid \tau\gamma x = x \}$$

と，対応 $\mathfrak{C}' \ni m + ae' \to m + iae \in (\mathfrak{C}^C)_{\tau\gamma}$ で同型であるから，以下両者を同一視する：$\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}^C)_{\tau\gamma}$．

split Cayley 代数 $\mathfrak{C}'$ の自己同型群を $G_{2(2)}$ で表す：

$$G_{2(2)} = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C}') \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}.$$

同一視 $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}^C)_{\tau\gamma}$ により，この群は

$$G_{2(2)}=\{\alpha\in G_2{}^C \mid \tau\gamma\alpha=\alpha\tau\gamma\}=(G_2{}^C)^{\tau\gamma}$$

で定義してもよい．

定理1.50 Lie 群 $G_{2(2)}$ の極分解は

$$G_{2(2)}\simeq(Sp(1)\times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{R}^8$$

で与えられる．

証明 $\mathfrak{C}'$ に内積 (x, y) を $(\gamma x, y)'$ で定義すると (x, y) は正値である．$\alpha\in G_{2(2)}$ は内積 $(x, y)'$ を不変にする（補題1.41）ことから，α の内積 (x, y) に関する転置写像 ${}^t\alpha$ は ${}^t\alpha=\gamma\alpha^{-1}\gamma\in G_{2(2)}$ となる．$G_{2(2)}$ は $\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C}')=GL(8, \boldsymbol{R})$ の代数部分群であるから Chevalley の補題より（$O(8)=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{C}')\mid(\alpha x, \alpha y)=(x, y)\}$ として）

$$\begin{aligned}G_{2(2)}&\simeq(G_{2(2)}\cap O(8))\times\boldsymbol{R}^d\\&=((G_2{}^C)^{\tau\gamma})^{\gamma}\times\boldsymbol{R}^d=((G_2{}^C)^{\tau})^{\gamma}\times\boldsymbol{R}^d=(G_2)^{\gamma}\times\boldsymbol{R}^d\\&=(Sp(1)\times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{R}^d,\quad d=8\end{aligned}$$

（定理1.13）となる．

定理1.51 (1) $z(G_{2(2)})=\{1\}$.

(2) $(G_{2(2)})_{e'}\cong SL(3, \boldsymbol{R})$.

証明 (1) 定理1.14と同様にすればよい．

(2) $\boldsymbol{C}'=\{x+ye' \mid x, y\in\boldsymbol{R}\}\subset\mathfrak{C}'$ とおき，同一視 $\mathfrak{C}'=\boldsymbol{C}'\oplus\boldsymbol{C}'^3$ をする．定理1.3と同様にすれば $(G_{2(2)})_{e'}\cong SU(3, \boldsymbol{C}')$ を得るが，$SU(3, \boldsymbol{C}')\cong SL(3, \boldsymbol{R})$ である（[3]定理3.3）．

Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ に対して述べてきた今までの結果は殆んどすべて split Cayley 代数 $\mathfrak{C}'$ に置き換えても成り立つ．例えば 3 対原理（定理1.7，補題1.8，補題1.9）では $O(8)$ の代りに $O(4,4)$，$SO(8)$ の代りに $O(4,4)_0$ として成り立つ．

II．例外型単純 Lie 群 F_4

1　例外 Jordan 代数 $\mathfrak{J}$

Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ の元を成分にもつ 3 次の Hermite 行列全体の集合を $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})$ で表す：

$$\mathfrak{J}=\{X\in M(3,\mathfrak{C})\,|\,X^*=X\},\qquad (X^*={}^t\overline{X}).$$

$\mathfrak{J}$ の元 X は

$$X=X(\xi,x)=\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix},\quad \xi_i\in\boldsymbol{R},\quad x_i\in\mathfrak{C}$$

の形をしている．$\mathfrak{J}$ は27次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間である．$\mathfrak{J}$ に **Jordan 積** $X\circ Y$ を

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$$

で定義する．この $\mathfrak{J}$ を**例外 Jordan 代数**という．$\mathfrak{J}$ において，**trace** $\mathrm{tr}(X)$，**内積** (X,Y)，**3 項線型形式** $\mathrm{tr}(X,Y,Z)$ をそれぞれ

$$\mathrm{tr}(X)=\xi_1+\xi_2+\xi_3,\quad X=X(\xi,x),$$

$$(X,Y)=\mathrm{tr}(X\circ Y),\quad \mathrm{tr}(X,Y,Z)=(X,Y\circ Z)$$

で定義する．さらに，$\mathfrak{J}$ に **Freudenthal 積** $X\times Y$ を

$$X\times Y=\frac{1}{2}(2X\circ Y-\mathrm{tr}(X)Y-\mathrm{tr}(Y)X+(\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)-(X,Y))E)$$

（E は単位行列）で定義し，**3 項式** (X,Y,Z)，**行列式** $\det X$ をそれぞれ

$$(X,Y,Z)=(X,Y\times Z),\quad \det X=\frac{1}{3}(X,X,X)$$

で定義する．$X=X(\xi,x)$，$Y=Y(\eta,y)$，$Z=Z(\zeta,z)$ として，(X,Y)，$\mathrm{tr}(X,Y,Z)$，(X,Y,Z)，$\det X$ を具体的に書くとそれぞれ次のようになる（添数は mod 3 とする）．

$$(X,Y)=\sum_{i=1}^{3}(\xi_i\eta_i+2(x_i,y_i)),$$

$$\mathrm{tr}(X,\ Y,\ Z)=\sum_{i=1}^{3}(\xi_i\eta_i\zeta_i+\mathrm{R}(x_iy_{i+1}z_{i+2}+x_iz_{i+1}y_{i+2})$$
$$+\xi_i((y_{i+1},\ z_{i+1})+(y_{i+2},\ z_{i+2}))+\eta_i((z_{i+1},\ x_{i+1})+(z_{i+2},\ x_{i+2}))$$
$$+\zeta_i((x_{i+1},\ y_{i+1})+(x_{i+2},\ y_{i+2}))),$$

$$(X,\ Y,\ Z)=\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{1}{2}(\xi_i\eta_{i+1}\zeta_{i+2}+\xi_i\eta_{i+2}\zeta_{i+1})+\mathrm{R}(x_iy_{i+1}z_{i+2}+x_iz_{i+2}y_{i+1})$$
$$-(\xi_i(y_i,\ z_i)+\eta_i(z_i,\ x_i)+\xi_i(x_i,\ y_i))\Big),$$

$$\det X=\xi_1\xi_2\xi_3+2\mathrm{R}(x_1x_2x_3)-\xi_1x_1\overline{x}_1-\xi_2x_2\overline{x}_2-\xi_3x_3\overline{x}_3.$$

補題2.1　$\mathfrak{J}$ において，次の諸公式が成り立つ．

1　(1)　$X\circ Y=Y\circ X$，$X\times Y=Y\times X$．

　(2)　$E\circ X=X$，$E\times X=\dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)E-X)$，$E\times E=E$．

2　(1)　内積 $(X,\ Y)$ は正値である．

　(2)　$\mathrm{tr}(X,\ Y,Z)=\mathrm{tr}(Y,Z,X)=\mathrm{tr}(Z,X,\ Y)=\mathrm{tr}(X,Z,\ Y)=\mathrm{tr}(Y,X,Z)=\mathrm{tr}(Z,\ Y,X)$．

　$(X,\ Y,Z)$ についても同様である．

　(3)　$(X,E)=(X,E,E)=\mathrm{tr}(X,E,E)=\mathrm{tr}(X)$，$\mathrm{tr}(X,\ Y,E)=(X,\ Y)$．

　(4)　$\mathrm{tr}(X\times Y)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)-(X,\ Y))$．

3　(1)　$X\circ(X\times X)=(\det X)E$　(**Cayley-Hamilton**)．

　(2)　$(X\times X)\times(X\times X)=(\det X)X$．

証明　**2** (2)は $\mathrm{tr}(X,\ Y,Z)$，$(X,\ Y,Z)$ の具体的な形から分かることである（補題2.15を用いてもよい）．他の **1**，**2** は容易である．**3** は $X=X(\xi,x)$ に対して

$$X\times X=\begin{pmatrix}\xi_2\xi_3-x_1\overline{x}_1 & \overline{x_1x_2}-\xi_3x_3 & x_3x_1-\xi_2\overline{x}_2\\ x_1x_2-\xi_3\overline{x}_3 & \xi_3\xi_1-x_2\overline{x}_2 & \overline{x_2x_3}-\xi_1x_1\\ \overline{x_3x_1}-\xi_2x_2 & x_2x_3-\xi_1\overline{x}_1 & \xi_1\xi_2-x_3\overline{x}_3\end{pmatrix}$$

となることを用いて直接計算すればよい．

$\mathfrak{J}$ に次の記号を導入する．

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$F_1(x)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&x\\0&\overline{x}&0\end{pmatrix},\quad F_2(x)=\begin{pmatrix}0&0&\overline{x}\\0&0&0\\x&0&0\end{pmatrix},\quad F_3(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\\overline{x}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

これらの元の間の Jordan 積，Freudenthal 積は次のようになる（添数は mod 3 とする）．

$$\begin{cases}E_i\circ E_i=E_i, & E_i\circ E_j=0,\quad i\neq j,\\ E_i\circ F_i(x)=0, & E_i\circ F_j(x)=\dfrac{1}{2}F_j(x),\quad i\neq j,\\ F_i(x)\circ F_i(y)=(x,y)(E_{i+1}+E_{i+2}), & F_i(x)\circ F_{i+1}(y)=\dfrac{1}{2}F_{i+2}(\overline{xy}).\end{cases}$$

$$\begin{cases}E_i\times E_i=0, & E_i\times E_{i+1}=\dfrac{1}{2}E_{i+2},\\ E_i\times F_i(x)=-\dfrac{1}{2}F_i(x), & E_i\times F_j(x)=0,\quad i\neq j,\\ F_i(x)\times F_i(y)=-(x,y)E_i, & F_i(x)\times F_{i+1}(y)=\dfrac{1}{2}F_{i+2}(\overline{xy}).\end{cases}$$

2　compact 例外群 F_4

定義　Jordan 代数 $\mathfrak{J}$ の自己同型群を F_4 で表す：

$$F_4=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J})\mid \alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}.$$

補題2.2　(1)　$\alpha\in F_4$ ならば $\alpha E=E$ となる．

(2)　$\alpha\in F_4$ は $\mathfrak{J}$ の trace $\mathrm{tr}(X)$ を不変にする：

$$\mathrm{tr}(\alpha X)=\mathrm{tr}(X),\quad X\in\mathfrak{J}.$$

証明　(1)　$E\circ X=X$ に α を施すと $\alpha E\circ\alpha X=\alpha X$ となる．$X=\alpha^{-1}E$ とおくと $\alpha E\circ E=E$，すなわち $\alpha E=E$ となる．

(2)　Cayley-Hamilton の公式 $X\circ(X\times X)=(\det X)E$（補題2.1），すなわち

$$X\circ(X\circ X)-\mathrm{tr}(X)X^2+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)^2-\mathrm{tr}(X^2))X=(\det X)E \qquad \text{(i)}$$

を用いる．(i) において，X の代りに αX とおき，α^{-1} を施すと

$$X\circ(X\circ X)-\mathrm{tr}(\alpha X)X^2+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\alpha X)^2-\mathrm{tr}((\alpha X)^2))X=(\det \alpha X)E \qquad \text{(ii)}$$

となる．(i)−(ii) をつくると

$$(\mathrm{tr}(\alpha X)-\mathrm{tr}(X))X^2+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)^2-\mathrm{tr}(\alpha X)^2+\mathrm{tr}((\alpha X)^2)-\mathrm{tr}(X^2))X$$
$$=(\det X-\det(\alpha X))E$$

となる．$X=F_i(e_j)$ $(i=1,2,3,\ j=0,1,\cdots,7)$ とおくと

$$\mathrm{tr}(\alpha F_i(e_j))(E_{i+1}+E_{i+2})+\frac{1}{2}(-\mathrm{tr}(\alpha F_i(e_j))^2+\mathrm{tr}((\alpha F_i(e_j))^2)-2)F_i(e_j)$$
$$=-\det(\alpha F_i(e_j))E$$

となる．この両辺の行列の成分を比較して

$$\mathrm{tr}(\alpha F_i(e_j))=0\ (\ =\mathrm{tr}(F_i(e_j))\ )$$

と $\mathrm{tr}((\alpha F_i(e_j))^2)=2$ を得る．後者を用いると

$$\mathrm{tr}(\alpha E_i)=\mathrm{tr}(\alpha(E-F_i(1)^2))=\mathrm{tr}(E)-\mathrm{tr}((\alpha F_i(1))^2)$$
$$=3-2=1\ (\ =\mathrm{tr}(E_i)\ ),\quad i=1,2,3$$

を得る．$\mathfrak{J}$ の $\boldsymbol{R}$-基の元 $X=E_i$, $F_i(e_j)$ に対し $\mathrm{tr}(\alpha X)=\mathrm{tr}(X)$ が成り立つので補題が証明された．

$\alpha\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})$ の内積 (X,Y) に関する転置写像を ${}^t\alpha$ で表わす：$({}^t\alpha X,Y)=(X,\alpha Y)$, $X,Y\in\mathfrak{J}$.

補題2.3 $\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})$ に対し次の 4 つは同値である．

(1) $\det \alpha X=\det X,\qquad X\in\mathfrak{J}.$

(2) $(\alpha X,\alpha Y,\alpha Z)=(X,Y,Z),\quad X,Y,Z\in\mathfrak{J}.$

(3) $\alpha X\times\alpha Y={}^t\alpha^{-1}(X\times Y),\qquad X,Y\in\mathfrak{J}.$

(4) $\alpha X\times\alpha X={}^t\alpha^{-1}(X\times X),\qquad X\in\mathfrak{J}.$

証明 (1)→(2) $\det\alpha X=\det X$ は $(\alpha X,\alpha X,\alpha X)=(X,X,X)$ である．X の代りに $\lambda X+\mu Y+\nu Z$ とおき $\lambda\mu\nu$ の係数を比較すると(2)を得る．(4)→(3) も，X の代りに $\lambda X+\mu Y$ とおいて $\lambda\mu$ の係数と比較すればよい．他は明らかである．

補題2.4 $\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})$ に対し

$$\det\alpha X=\det X,\ X\in\mathfrak{J}\quad ならば\quad \det{}^t\alpha^{-1}X=\det X,\ X\in\mathfrak{J}$$

が成り立つ.

証明　${}^t\alpha^{-1}(Y\times Y)\times{}^t\alpha^{-1}(Y\times Y)$

$=(\alpha Y\times\alpha Y)\times(\alpha Y\times\alpha Y)$ (補題2.3)

$=(\det\alpha Y)\alpha Y$ (補題2.1) $=(\det Y)\alpha Y=\alpha((\det Y)Y)$

$=\alpha((Y\times Y)\times(Y\times Y))\qquad Y\in\mathfrak{J}$

において $Y=X\times X$, $X\in\mathfrak{J}$ とおくと

$${}^t\alpha^{-1}((\det X)X)\times{}^t\alpha^{-1}((\det X)X)=\alpha((\det X)X\times(\det X)X)$$

を得る.

(1)　$\det X\neq 0$ のとき. ${}^t\alpha^{-1}X\times{}^t\alpha^{-1}X=\alpha(X\times X)$ となるので

$$3\det{}^t\alpha^{-1}X=({}^t\alpha^{-1}X,{}^t\alpha^{-1}X\times{}^t\alpha^{-1}X)=({}^t\alpha^{-1}X,\alpha(X\times X))$$
$$=(X,X\times X)=3\det X$$

より $\det{}^t\alpha^{-1}X=\det X$ となる. α の代りに α^{-1} を用いると $\det{}^t\alpha X=\det X$ も得る.

(2)　$\det X=0$ のときにも $\det{}^t\alpha^{-1}X=0$ である. 実際, $\det{}^t\alpha^{-1}X\neq 0$ ならば, (1) の X の代りに ${}^t\alpha^{-1}X$ とおくと $\det{}^t\alpha({}^t\alpha^{-1}X)=\det{}^t\alpha^{-1}X$ となるが, $0=\det X=\det{}^t\alpha^{-1}X\neq 0$ となり矛盾する.

定理2.5　$F_4=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J})\,|\,\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}$　(1)

$=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J})\,|\,\mathrm{tr}(\alpha X,\alpha Y,\alpha Z)=\mathrm{tr}(X,Y,Z),(\alpha X,\alpha Y)=(X,Y)\}$　(2)

$=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J})\,|\,\det\alpha X=\det X,(\alpha X,\alpha Y)=(X,Y)\}$　(3)

$=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J})\,|\,\det\alpha X=\det X,\alpha E=E\}$　(4)

$=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J})\,|\,\alpha(X\times Y)=\alpha X\times\alpha Y\}$　(5)

証明　(1)→(2)　$(\alpha X,\alpha Y)=\mathrm{tr}(\alpha X\circ\alpha Y)=\mathrm{tr}(\alpha(X\circ Y))=\mathrm{tr}(X\circ Y)$ (補題2.2) $=(X,Y)$. $\mathrm{tr}(\alpha X,\alpha Y,\alpha Z)=(\alpha X,\alpha Y\circ\alpha Z)=(\alpha X,\alpha(Y\circ Z))=(X,Y\circ Z)=\mathrm{tr}(X,Y,Z)$.

(2)→(1)　$(\alpha X\circ\alpha Y,\alpha Z)=\mathrm{tr}(\alpha X,\alpha Y,\alpha Z)=\mathrm{tr}(X,Y,Z)=(X\circ Y,Z)=(\alpha(X\circ Y),\alpha Z)$ がすべての $Z\in\mathfrak{J}$ で成り立つから $\alpha X\circ\alpha Y=\alpha(X\circ Y)$ を得る.

(2)→(3)　既に (2)→(1) が成り立つことを知ったので, $\mathrm{tr}(\alpha X)=\mathrm{tr}(X)$ (補題2.2) を用いることができる. さて

$$3\det\alpha X=\mathrm{tr}(\alpha X,\alpha X,\alpha X)-\frac{3}{2}\mathrm{tr}(\alpha X)(\alpha X,\alpha X)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\alpha X)^3$$
$$=\mathrm{tr}(X,X,X)-\frac{3}{2}\mathrm{tr}(X)(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X)^3=3\det X$$

となる．

(3)→(5)　$(\alpha(X\times Y),\alpha Z)=(X\times Y,Z)=(X,Y,Z)=(\alpha X,\alpha Y,\alpha Z)$（補題2.3）$=(\alpha X\times\alpha Y,\alpha Z)$ がすべての $Z\in\mathfrak{J}$ で成り立つから，$\alpha X\times\alpha Y=\alpha(X\times Y)$ を得る．

(5)→(4)
$$(\det\alpha X)\alpha X=(\alpha X\times\alpha X)\times(\alpha X\times\alpha X)\ (\text{補題2.1})$$
$$=\alpha((X\times X)\times(X\times X))=(\det X)\alpha X$$

より $\det\alpha X=\det X$ を得る．次に $P=\alpha E$ とおく．$\alpha X\times\alpha E=\alpha(X\times E)=\frac{1}{2}\alpha(\mathrm{tr}(X)E-X)$ より

$$\alpha X\times P=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X)P-\frac{1}{2}\alpha X,\quad X\in\mathfrak{J} \qquad \text{(i)}$$

となる．$P=P(\rho,p)$ として，(i) に $X=\alpha^{-1}E_1$ とおくと（$\lambda=\mathrm{tr}(\alpha^{-1}E_1)$ とした）

$$\frac{1}{2}\rho_2E_3+\frac{1}{2}\rho_3E_2-\frac{1}{2}F_1(p_1)$$
$$=\frac{1}{2}(\lambda(\rho_1E_1+\rho_2E_2+\rho_3E_3+F_1(p_1)+F_2(p_2)+F_3(p_3))-E_1)$$

となるので，係数を比較して

$$0=\lambda\rho_1-1,\quad \rho_3=\lambda\rho_2,\quad \rho_2=\lambda\rho_3,\quad -p_1=\lambda p_1,\quad 0=\lambda p_2,\quad 0=\lambda p_3$$

となる．これより $p_2=p_3=0$ を得る．同様に $X=\alpha^{-1}E_2$ とおいて $p_1=0$ を得る．さらに (i) に $X=\alpha^{-1}F_1(1)$ とおくと（$\mu=\mathrm{tr}(\alpha^{-1}F_1(1))$ とした）

$$-\frac{1}{2}\rho_1F_1(1)=\frac{1}{2}(\mu(\rho_1E_1+\rho_2E_2+\rho_3E_3)-F_1(1))$$

となるので，係数を比較して $\rho_1=1$ を得る．同様に $\rho_2=\rho_3=1$ を得る．よって $\alpha E=P=E$ である．

(4)→(2)　$\mathrm{tr}(\alpha X)=(\alpha X,E,E)=(\alpha X,\alpha E,\alpha E)=(X,E,E)$（補題2.3）$=\mathrm{tr}(X)$．$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)-(X,Y))=(X,Y,E)$（補題2.1）$=(\alpha X,\alpha Y,\alpha E)=(\alpha X,\alpha Y,E)=\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\alpha X)\mathrm{tr}(\alpha Y)-(\alpha X,\alpha Y))=\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)-(\alpha X,\alpha Y))$ より $(X,Y)=(\alpha X,\alpha Y)$ を得る．さらに $(X,Y,Z)=\mathrm{tr}(X,Y,Z)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X)(Y,Z)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(Y)(Z,X)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(Z)(X,Y)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)\mathrm{tr}(Z)$ と $(\alpha X,\alpha Y,$

$\alpha Z)=(X, Y, Z)$ を用いると，$\mathrm{tr}(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z)=\mathrm{tr}(X, Y, Z)$ を得る．

定理2.6　F_4 は compact Lie 群である．

証明　F_4 は直交群 $O(27)=O(\mathfrak{J})=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})\,|\,(\alpha X, \alpha Y)=(X, Y)\}$ の閉部分群（定理2.5(2)）として，compact Lie 群である．

3　F_4 の部分群 $Spin(9)$

定義　F_4 の部分群 D_4 を

$$D_4=\{\alpha\in F_4\,|\,\alpha E_i=E_i,\quad i=1,2,3\}$$

で定義する．D_4 は compact Lie 群である．

定理2.7　$$D_4\cong Spin(8).$$

証明　$Spin(8)=\widetilde{D}_4$（定理1.47）とし，写像 $\varphi: Spin(8)\to D_4$ を

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi_1 & \alpha_3x_3 & \overline{\alpha_2x_2} \\ \overline{\alpha_3x_3} & \xi_2 & \alpha_1x_1 \\ \alpha_2x_2 & \overline{\alpha_1x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義する．そのために，まず $\alpha=\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\in D_4$ を示さなければならない．実際，$\det \alpha X=\det X$ は $\mathrm{R}((\alpha_1x_1)(\alpha_2x_2)(\alpha_3x_3))=\mathrm{R}(\overline{(\alpha_3(\overline{x_1x_2}))}\alpha_3x_3)=(\alpha_3(\overline{x_1x_2}), \alpha_3x_3)=(\overline{x_1x_2}, x_3)=\mathrm{R}(x_1x_2x_3)$ に注意すると分かる．これと $\alpha E=E$ より $\alpha\in F_4$ である（定理2.5(4)）．さらに $\alpha E_i=E_i$，$i=1,2,3$ より $\alpha\in D_4$ である．明らかに φ は群準同型写像である．φ の全射を示そう．

$$\mathfrak{J}_i=\{F_i(x)\,|\,x\in\mathfrak{C}\}=\{X\in\mathfrak{J}\,|\,2E_{i+1}\circ X=2E_{i+2}\circ X=X\}$$

とおく．$\alpha\in D_4$ とする．$X\in\mathfrak{J}_i$ に対し $\alpha X\in\mathfrak{J}_i$ となるので，α は $\boldsymbol{R}$-同型写像 $\alpha: \mathfrak{J}_i\to\mathfrak{J}_i$ および $\alpha_i: \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$，

$$\alpha F_i(x)=F_i(\alpha_ix),\quad x\in\mathfrak{C}$$

を誘導する，$i=1,2,3$．関係 $F_i(x)\circ F_i(y)=(x, y)(E_{i+1}+E_{i+2})$ に α を施すと，左辺は $F_i(\alpha_ix)\circ F_i(\alpha_iy)=(\alpha_ix, \alpha_iy)(E_{i+1}+E_{i+2})$ となるので

$$(\alpha_ix, \alpha_iy)=(x, y),\quad x, y\in\mathfrak{C}$$

すなわち $\alpha_i\in O(8)$，$i=1, 2, 3$ が分かる．さらに，関係 $F_1(x)\circ F_2(y)=\dfrac{1}{2}F_3(\overline{xy})$ に α を施すことにより

$$(\alpha_1 x)(\alpha_2 y)=\overline{\alpha_3(\overline{xy})}, \quad x, y \in \mathfrak{C}$$

を得る．補題1.9より $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in SO(8)$ となるので，$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in Spin(8)$ であり，かつ $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\alpha$ である．これで φ の全射が示された．Ker $\varphi=\{(1, 1, 1)\}$ は明らかである．よって Lie 群の同型 $Spin(8) \cong D_4$ を得る．

F_4 の部分群

$$(F_4)_{E_1}=\{\alpha \in F_4 \mid \alpha E_1=E_1\}$$

を考察しよう．そのため $\mathfrak{J}$ の $\boldsymbol{R}$-ベクトル部分空間 $\mathfrak{J}_{01}$，$\mathfrak{J}_{23}$ をそれぞれ

$$\mathfrak{J}_{01}=\{X \in \mathfrak{J} \mid E_1 \circ X=0, \operatorname{tr}(X)=0\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\xi \end{pmatrix} \middle| \xi \in \boldsymbol{R}, x \in \mathfrak{C}\right\},$$

$$\mathfrak{J}_{23}=\{X \in \mathfrak{J} \mid 2E_1 \circ Y=Y\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} 0 & y_3 & \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| y_2, y_3 \in \mathfrak{C}\right\}$$

で定義する．

補題2.8　$A \in \mathfrak{J}_{01}$，$(A, A)=2$ を満たす元 A を任意に与える．

$X_0 \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(X_0, X_0)=2$，$(X_0, A)=0$ を満たす任意の元とする．

$Y_0 \in \mathfrak{J}_{23}$ を $(Y_0, Y_0)=2$，$2A \circ Y_0=-Y_0$ を満たす任意の元とする．

$$Z_0=2X_0 \circ Y_0$$

とおく．

$X_1 \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(X_1, X_1)=2$，$(X_1, A)=(X_1, X_0)=0$ を満たす任意の元とする．

$X_2 \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(X_2, X_2)=2$，$(X_2, A)=(X_2, X_0)=(X_2, X_1)=0$ を満たす任意の元とする．

$$Y_1=-2Z_0 \circ X_1, \quad Z_2=-2X_2 \circ Y_0, \quad X_3=-2Y_1 \circ Z_2$$

とおく．最後に

$X_4 \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(X_4, X_4)=2$，$(X_4, A)=(X_4, X_0)=(X_4, X_1)=(X_4, X_2)=(X_4, X_3)=0$ を満たす任意の元とする．

$$Z_4=-2X_4 \circ Y_0, \quad Y_2=-2Z_0 \circ X_2, \quad Y_3=-2Z_0 \circ X_3,$$

$$X_5=-2Y_1 \circ Z_4, \quad X_6=2Y_2 \circ Z_4, \quad X_7=-2Y_3 \circ Z_4$$

とおき，さらに

$$Y_i=-2Z_0 \circ X_i, \quad i=4, 5, 6, 7,$$

$$Z_i=-2X_i\circ Y_0,\quad i=1,3,5,6,7$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{R}$-同型写像 $\alpha:\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ を

$$\alpha E=E,\ \ \alpha E_1=E_1,\ \ \alpha(E_2-E_3)=A,$$

$$\alpha F_1(e_i)=X_i,\ \ \alpha F_2(e_i)=Y_i,\ \ \alpha F_3(e_i)=Z_i,\ \ i=0,1,\cdots,7$$

を満たすようにつくると，$\alpha\in(F_4)_{E_1}$ である．

証明　補題の設定が妥当であること，および α が

$$\alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y,\quad X,Y\in\mathfrak{J}$$

を満たすことを示さなければならない．そのためには，$\mathfrak{J}$ の $\boldsymbol{R}$-基の元 E_i, $F_j(e_k)$ に対して示せばよいが，正直にやると $27^2=729$ 回確かめねばならない．これはたまらないからいくらか準備して回数を減らして証明するのであるが，詳しくは I. Yokota, A Note of *Spin*(9), J. Fac. Sci. Shinshu Univ. **3** (1968) をみて下さい．

命題2.9　　$(F_4)_{E_1}/Spin(8)\simeq S^8$.

特に $(F_4)_{E_1}$ は単連結である．

証明　$S^8=\{X\in\mathfrak{J}_{01}\,|\,(X,X)=2\}$ とおくと，S^8 は 8 次元球面である．$\alpha\in(F_4)_{E_1}$，$X\in S^8$ ならば $\alpha X\in S^8$ であるから，$(F_4)_{E_1}$ は S^8 に働く．この働き方は推移的である．実際，与えられた $A\in S^8$ に対して補題2.8の $\alpha\in(F_4)_{E_1}$ をつくると $\alpha(E_2-E_3)=A$ となる．よって推移的である．$E_2-E_3\in S^8$ における $(F_4)_{E_1}$ の等方群は $Spin(8)$ である．実際，$\alpha\in(F_4)_{E_1}$ が $\alpha(E_2-E_3)=E_2-E_3$ とする．$\alpha\in(F_4)_{E_1}$ は $\alpha E=E$，$\alpha E_1=E_1$ を満たすので $\alpha(E_2+E_3)=E_2+E_3$ となり，結局 $\alpha E_i=E_i$，$i=1,2,3$，すなわち $\alpha\in Spin(8)$ となる．逆に $\alpha\in Spin(8)$ ならば $\alpha(E_2-E_3)=E_2-E_3$ である．よって同相 $(F_4)_{E_1}/Spin(8)\simeq S^8$ を得る．

定理2.10　　$(F_4)_{E_1}\cong Spin(9)$.

証明　$O(9)=O(\mathfrak{J}_{01})=\{\beta\in\mathrm{Iso}_{R}(\mathfrak{J}_{01})\,|\,(\beta X,\beta Y)=(X,Y)\}$ とする．$\alpha\in(F_4)_{E_1}$ の $\mathfrak{J}_{01}$ への制限 $\alpha'=\alpha|\mathfrak{J}_{01}$ は $\alpha'\in O(9)$ である．よって群準同型写像 $p:(F_4)_{E_1}\to O(9)$，$p(\alpha)=\alpha'$ が定義できる．p は連続であり，$(F_4)_{E_1}$ は連結である（命題2.9）から

$$p:(F_4)_{E_1}\to SO(9)$$

を誘導する．p は全射である．実際，p の $Spin(8)=\{\alpha\in(F_4)_{E_1}\,|\,\alpha(E_2-E_3)=E_2-E_3\}$ への制限 p' は定理1.47の $p: Spin(8)\to SO(8)$ に一致している．特

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & Spin(8) & \longrightarrow & (F_4)_{E_1} & \longrightarrow & S^8 & \longrightarrow & * \\ & & \downarrow p' & & \downarrow p & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & SO(8) & \longrightarrow & SO(9) & \longrightarrow & S^8 & \longrightarrow & * \end{array}$$

に $p': Spin(8)\to SO(8)$ は全射である．よって $p:(F_4)_{E_1}\to SO(9)$ も全射である. $\mathrm{Ker}\,p=\{1,\ \sigma\}=Z_2(\sigma=\varphi(1,\ -1,\ -1))$ である. 実際, $\alpha\in\mathrm{Ker}\,p$ とすると, すべて $X\in\mathfrak{J}_{01}$ に対して $\alpha X=X$ である．特に $\alpha(E_2-E_3)=E_2-E_3$ より $\alpha\in Spin(8)$ である．よって定理1.47より $\mathrm{Ker}\,p=\{1,\sigma\}=Z_2$ となる．よって群同型

$$(F_4)_{E_1}/Z_2\cong SO(9)$$

を得る．これより $(F_4)_{E_1}$ は $SO(9)$ の連結な（命題2.9）被覆群として $Spin(9)$ に同型である．

4　F_4 の Lie 環 $\mathfrak{f}_4$

Lie 群 F_4 の Lie 環 $\mathfrak{f}_4$ を調べる前に次の Lie 群

$$\begin{aligned} E_{6(-26)} &= \{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})\,|\,\det\alpha X=\det X\} \\ &= \{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})\,|\,{}^t\alpha^{-1}(X\times Y)=\alpha X\times\alpha Y\} \end{aligned}$$

（補題2.3）の Lie 環 $\mathfrak{e}_{6(-26)}$ を少し調べておく．

命題2.11　Lie 群 $E_{6(-26)}$ の Lie 環 $\mathfrak{e}_{6(-26)}$ は

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_{6(-26)} &= \{\phi\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})\,|\,(\phi X,X,X)=0\} \\ &= \{\phi\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})\,|\,(\phi X,\ Y,Z)+(X,\phi Y,Z)+(X,\ Y,\phi Z)=0\} \\ &= \{\phi\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})\,|\,-{}^t\phi(X\times Y)=\phi X\times Y+X\times\phi Y\} \end{aligned}$$

である．

証明　$\mathfrak{e}_{6(-24)}$ の 3 つの条件が同値であることは容易である（補題2.3参照）．さて，$\phi\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})$ がすべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $((\exp t\phi)X,(\exp t\phi)X,(\exp t\phi)X)=(X,X,X)$ を満たすならば，これを t で微分して $t=0$ とおくと $(\phi X,X,X)=0$ を得る．逆に，$\phi\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J})$ が $-{}^t\phi(X\times Y)=\phi X\times Y+X\times\phi Y$ を満たすならば $\alpha=\exp t\phi$ が ${}^t\alpha^{-1}(X\times Y)=\alpha X\times\alpha Y$ を満たすことが

容易に確かめられる．

定理2.12　Lie 群 F_4 の Lie 環 $\mathfrak{f}_4$ は

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_4 &= \{\delta \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid \delta(X \circ Y) = \delta X \circ Y + X \circ \delta Y\} \\ &= \left\{\delta \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \,\middle|\, \begin{matrix}\mathrm{tr}(\delta X, Y, Z) + \mathrm{tr}(X, \delta Y, Z) + \mathrm{tr}(X, Y, \delta Z) = 0 \\ (\delta X, Y) + (X, \delta Y) = 0\end{matrix}\right\} \\ &= \{\delta \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid (\delta X, X, X) = 0, (\delta X, Y) + (X, \delta Y) = 0\} \\ &= \{\delta \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid (\delta X, X, X) = 0, \delta E = 0\} \\ &= \{\delta \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid \delta(X \times Y) = \delta X \times Y + X \times \delta Y\}\end{aligned}$$

である．

証明　定理2.5の結果である．

$X, Y \in M(3, \mathfrak{C})$ に対し，$[X, Y] \in M(3, \mathfrak{C})$ を

$$[X, Y] = XY - YX$$

で定義する．また

$$\mathfrak{M}^- = \{A \in M(3, \mathfrak{C}) \mid A^* = -A\}$$

とおく．次の補題は容易である．

補題2.13　$$[\mathfrak{M}^-, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{J}, \quad [\mathfrak{J}, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{M}^-.$$

$[\mathfrak{M}^-, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{J}$ であるから，$A \in \mathfrak{M}^-$ に対して $\boldsymbol{R}$-線型写像 $\tilde{A} : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ を

$$\tilde{A}X = [A, X]$$

で定義する．

補題2.14　$X \in \mathfrak{J}$ に対して，ある $a \in \mathfrak{C}_0$ が存在して

$$[X, XX] = aE$$

となる．

証明　$X = \left(x_{ij}\right)$，$x_{ij} \in \mathfrak{C}$，$\overline{x}_{ij} = x_{ji}$ とする．$[X, XX] = X(XX) - (XX)X$ の (i, j)-成分（$i, j = 1, 2, 3$）は

$$a_{ij} = \sum_{k,l}(x_{ik}(x_{kl}x_{lj}) - (x_{ik}x_{kl})x_{lj}) = -\sum_{k,l}\{x_{ik}, x_{kl}, x_{lj}\}$$

である．x_{kk} は実数であるから，$\{\ ,\ ,\ \}$ が x_{kk} を含むならば 0 である．$i \neq j$ のときは $\{a, \overline{a}, x\}$ 等の和になるから $a_{ij}=0$ である．$i=j$ のとき

$$a_{11}=-\{x_{12}, x_{23}, x_{31}\}-\{x_{13}, x_{32}, x_{21}\}$$
$$a_{22}=-\{x_{21}, x_{13}, x_{32}\}-\{x_{23}, x_{31}, x_{12}\}$$
$$a_{33}=-\{x_{31}, x_{12}, x_{23}\}-\{x_{32}, x_{21}, x_{13}\}$$

であるが，これらは等しい：$a_{11}=a_{22}=a_{33}(=a$ とおく)．よって $[X, XX]=aE$ を得る．$X, XX \in \mathfrak{J}$ であるから $[X, XX] \in \mathfrak{M}^-$ となる(補題2.13)．よって $(aE)^*=-aE$，$\overline{a}E=-aE$ より $a \in \mathfrak{C}_0$ である．

次の命題2.16の計算のために，$M(3, \mathfrak{C})$ に実数値をとる内積 (X, Y) を

$$(X, Y)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY+Y^*X^*)$$

で定義する．($\mathfrak{J}$ の内積 (X, Y) の拡張になっている)．

補題2.15 $M(3, \mathfrak{C})$ の内積に関し

$$(XY, Z)=(YZ, X)=(ZX, Y)=(X, YZ)=(Y, ZX)=(Z, XY)$$

が成り立つ．

証明 $X=\left(x_{ij}\right)$，$Y=\left(y_{ij}\right)$，$Z=\left(z_{ij}\right)$ とするとき

$$\begin{aligned}(XY, Z)&=\mathrm{R}(XY, Z)=\frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{tr}((XY)Z+Z^*(Y^*X^*)))\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{R}\left(\sum_{i,j,k}((x_{ij}y_{jk})z_{ki}+\overline{z}_{ji}(\overline{y}_{kj}\overline{x}_{ik}))\right)\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{R}\left(\sum_{i,j,k}((y_{jk}z_{ki})x_{ij}+\overline{x}_{ik}(\overline{z}_{ji}\overline{y}_{kj}))\right)\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{tr}((YZ)X+X^*(Z^*Y^*)))=(YZ, X)\end{aligned}$$

である．

命題2.16 $A \in \mathfrak{M}^-$，$\mathrm{tr}(A)=0$ ならば $\tilde{A} \in \mathfrak{f}_4$ である．

証明 定理2.12の同値な条件より次の 2 つの式

$$([A, X], Y)+(X, [A, Y])=0,$$
$$\mathrm{tr}([A, X], Y, Z)+\mathrm{tr}(X, [A, Y], Z)+\mathrm{tr}(X, Y, [A, Z])=0$$

$X, Y, Z \in \mathfrak{J}$ を示せばよい．さて，初めの式の左辺 $=(AX, Y)-(XA, Y)+(X, AY)-(X, YA)=0$（補題2.15）である．次に

$$([A, X], XX)=0, \quad X \in \mathfrak{J}$$

を示そう．実際，$[X, XX]=aE$，$a \in \mathfrak{C}_0$ とする（補題2.14）とき

$$\begin{aligned}([A, X], XX) &= (AX, XX)-(XA, XX) \\ &= (A, X(XX))-(A, (XX)X) \quad (\text{補題}2.15) \\ &= (A, [X, XX])=(A, aE)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(Aa+\overline{a}A^*) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(Aa-aA)=\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)a-a\,\mathrm{tr}(A))=0\end{aligned}$$

となる．この式の X の代りに $\lambda X+\mu Y+\nu Z$ とおいて $\lambda\mu\nu$ の係数を比較すると

$$([A, X], YZ+ZY)+([A, Y], XZ+ZX)+([A, Z], XY+YX)=0$$

を得るが，これが求める式である．

$\mathfrak{M}^-$ に次の記号

$$A_1(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & -\overline{a} & 0\end{pmatrix}, \quad A_2(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\overline{a}\\ 0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad A_3(a)=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ -\overline{a} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

を導入する．$a \in \mathfrak{C}$ に対し $\widetilde{A}_i(a) \in \mathfrak{f}_4$ であり（命題2.16），$\mathfrak{J}$ への作用は

$$\begin{cases}\widetilde{A}_i(a)E_i=0, & \widetilde{A}_i(a)F_i(x)=2(a, x)(E_{i+1}-E_{i+2}),\\ \widetilde{A}_i(a)E_{i+1}=-F_i(a), & \widetilde{A}_i(a)F_{i+1}(x)=F_{i+2}(\overline{ax}),\\ \widetilde{A}_i(a)E_{i+2}=F_i(a), & \widetilde{A}_i(a)F_{i+2}(x)=-F_{i+1}(\overline{xa})\end{cases}$$

で与えられる．

命題2.17　$Spin(8)=\{\alpha \in F_4 \mid \alpha E_i=E_i,\ i=1, 2, 3\}$ の Lie 環 $\mathfrak{d}_4$ は

$$\mathfrak{d}_4=\{\delta \in \mathfrak{f}_4 \mid \delta E_i=0,\ i=1, 2, 3\}$$

であり，$\mathfrak{d}_4$ は $SO(8)$ の Lie 環

$$\mathfrak{D}_4=\{D \in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{C}) \mid (Dx, y)+(x, Dy)=0\}$$

と次の対応で同型である．

$$D_1 \in \mathfrak{D}_4 \to \delta \in \mathfrak{d}_4,$$

$$\delta\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & D_3x_3 & \overline{D_2x_2}\\ \overline{D_3x_3} & 0 & D_1x_1\\ D_2x_2 & \overline{D_1x_1} & 0\end{pmatrix}$$

ここに D_2，D_3 は D_1 に対して 3 対原理

$$(D_1x)y+x(D_2y)=\overline{D_3(\overline{xy})}, \quad x, y \in \mathfrak{C}$$

より定まる $\mathfrak{D}_4$ の元である．

定理2.18 Lie 環 $\mathfrak{f}_4$ の元 δ は

$$\delta=D+\tilde{A}, \qquad D\in\mathfrak{d}_4,\ A\in\mathfrak{M}^-,\ \mathrm{diag}\,A=0$$

(diag $A=0$ は A の対角線の成分がすべて 0 であることを意味する）と一意に表される．特に $\mathfrak{f}_4$ の次元は

$$\dim \mathfrak{f}_4=28+3\times 8=52$$

である．

証明 $\delta\in\mathfrak{f}_4$ を関係 $E_i\circ E_i=E_i$, $E_i\circ E_j=0$, $i\neq j$ に施すと，$2E_i\circ\delta E_i=\delta E_i$, $\delta E_i\circ E_j+E_i\circ\delta E_j=0$ となる．これより

$$\delta E_1=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & \overline{a}_2\\ -\overline{a}_3 & 0 & 0\\ a_2 & 0 & 0\end{pmatrix}, \delta E_2=\begin{pmatrix}0 & a_3 & 0\\ \overline{a}_3 & 0 & -a_1\\ 0 & -\overline{a}_1 & 0\end{pmatrix}, \delta E_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\overline{a}_2\\ 0 & 0 & a_1\\ -a_2 & \overline{a}_1 & 0\end{pmatrix}$$

$a_i\in\mathfrak{C}$ の形であることが分かる．これらの a_i を用いて行列 $A=\begin{pmatrix}0 & a_3 & -\overline{a}_2\\ -\overline{a}_3 & 0 & a_1\\ a_2 & -\overline{a}_1 & 0\end{pmatrix}$ をつくると，$A\in\mathfrak{M}^-$, diag $A=0$ であって

$$\delta E_i=\tilde{A}E_i, \quad i=1,2,3$$

となっている．$D=\delta-\tilde{A}$ とおくと，$DE_i=0$, $i=1,2,3$ となるから $D\in\mathfrak{d}_4$ である．以上で $\delta=D+\tilde{A}$, $D\in\mathfrak{d}_4$, $A\in\mathfrak{M}^-$, diag $A=0$ と表された．表示の一意性を示そう．$D+\tilde{A}=0$, $D\in\mathfrak{d}_4$, $A\in\mathfrak{M}^-$, diag $A=0$ とする．これを E_i に施すと $\tilde{A}E_i=0$, $i=1,2,3$ となるが，これより $A=0$ が分かり，$D=0$ も得る．以上で定理が証明された．

5 F_4 の連結性

F_4 の単位元 1 を含む連結成分を $(F_4)_0$ で表す．$(F_4)_0=F_4$ を示そう．

補題2.19 $a\in\mathfrak{C}$ に対して写像 $\beta_1(a):\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$, $\beta_1(a)X(\xi,x)=Y(\eta,y)$ を

$$\begin{cases} \eta_1=\xi_1 \\ \eta_2=\dfrac{\xi_2+\xi_3}{2}+\dfrac{\xi_2-\xi_3}{2}\cos 2|a|+\dfrac{(a,x_1)}{|a|}\sin 2|a| \\ \eta_3=\dfrac{\xi_2+\xi_3}{2}-\dfrac{\xi_2-\xi_3}{2}\cos 2|a|-\dfrac{(a,x_1)}{|a|}\sin 2|a|, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=x_1-\dfrac{\xi_2-\xi_3}{2}\dfrac{a}{|a|}\sin 2|a|-\dfrac{2(a,x_1)a}{|a|^2}\sin^2|a| \\ y_2=x_2\cos|a|-\dfrac{\overline{x_3 a}}{|a|}\sin|a| \\ y_3=x_3\cos|a|+\dfrac{\overline{a x_2}}{|a|}\sin|a| \end{cases}$$

（$a=0$ のときには $\dfrac{\sin|a|}{|a|}=1$ とする）と定義すると $\beta_1(a)\in(F_4)_0$ である．

証明　$A_1(a)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -\overline{a} & 0 \end{pmatrix}$ に対して $\widetilde{A}_1(a)\in\mathfrak{f}_4$ であり（命題2.16），かつ $\beta_1(a)=\exp\widetilde{A}_1(a)$ である（計算略）．よって $\beta_1(a)\in(F_4)_0$ である．

命題2.20　任意の $X\in\mathfrak{J}$ は，ある $\alpha\in(F_4)_0$ により対角線形の行列に変形される：

$$\alpha X=\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix},\quad \xi_i\in\boldsymbol{R}.$$

さらに，この ξ_1，ξ_2，ξ_3 は順序を除いて（$\alpha\in(F_4)_0$ の取り方によらず）X に対して一意に定まる．

証明　$X\in\mathfrak{J}$ を固定して，$\mathfrak{X}=\{\alpha X\mid\alpha\in(F_4)_0\}$ とおく．$(F_4)_0$ は compact である（定理2.6）から，$\mathfrak{X}$ も compact である．$Y=Y(\eta,y)$ が $\mathfrak{X}$ を動くときの $\eta_1{}^2+\eta_2{}^2+\eta_3{}^2$ の最大値 $\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+\xi_3{}^2$ を考える．（$\mathfrak{X}$ は compact であるからこの最大値は存在する）．この最大値を $X_0=X_0(\xi,x)\in\mathfrak{X}$ で取るとすると，X_0 は対角線形である．実際，X_0 が対角線形でないとし，例えば X_0 の (2,3)-成分 x_1 が $x_1\neq 0$ としよう．$a(t)=\dfrac{x_1}{|x_1|}t$，$t>0$ に対して補題2.19の $\beta_1(a(t))\in(F_4)_0$ をつくると，$Y(\eta(t),y(t))=\beta_1(a(t))X_0\in\mathfrak{X}$ に対し

$$\eta_1(t)^2+\eta_2(t)^2+\eta_3(t)^2=\xi_1{}^2+\left(\frac{\xi_2+\xi_3}{2}+\frac{\xi_2-\xi_3}{2}\cos 2t+|x_1|\sin 2t\right)^2$$

$$+\left(\frac{\xi_2+\xi_3}{2}-\frac{\xi_2-\xi_3}{2}\cos 2t-|x_1|\sin 2t\right)^2$$

$$=\xi_1{}^2+2\left(\frac{\xi_2+\xi_3}{2}\right)^2+2\left(\frac{\xi_2-\xi_3}{2}\cos 2t+|x_1|\sin 2t\right)^2$$

$$\leqq \xi_1{}^2+2\left(\frac{\xi_2+\xi_3}{2}\right)^2+2\left(\left(\frac{\xi_2-\xi_3}{2}\right)^2+|x_1|^2\right)$$

（この値は最大値であり，ある $t>0$ で確かにこの値をとっている）

$$=\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+\xi_3{}^2+2|x_1|^2$$

となり，$\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+\xi_3{}^2$ が最大値であるという仮定に反する．よって $x_1=0$ である．$x_2=x_3=0$ の証明も，補題2.19と同様な $\beta_2(a)$，$\beta_3(a)\in(F_4)_0$ をつくって証明すればよい．以上で X_0 が対角線型であることが示された．命題の後半を示そう．$X\in\mathfrak{J}$ がある $\alpha\in F_4$ により $\alpha X=\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & \xi_3\end{pmatrix}$ に変形されたとするとき，$\mathrm{tr}(X)=\mathrm{tr}(\alpha X)$（補題2.2）$=\sum_{i=1}^{3}\xi_i$，$(X, X)=(\alpha X, \alpha X)$（定理2.5）$=\sum_{i=1}^{3}\xi_i{}^2$，$\mathrm{tr}(X, X, X)=\mathrm{tr}(\alpha X, \alpha X, \alpha X)$（定理2.5）$=\sum_{i=1}^{3}\xi_i{}^3$ となる．よって，ξ_1, ξ_2, ξ_3 は連立方程式

$$\begin{cases}\xi_1+\xi_2+\xi_3=\mathrm{tr}(X)\\ \xi_1{}^2+\xi_2{}^2+\xi_3{}^2=(X, X)\\ \xi_1{}^3+\xi_2{}^3+\xi_3{}^3=\mathrm{tr}(X, X, X)\end{cases}$$

の解として（順序を除いて）X に対し一意に定まる．

Cayley 射影平面とよばれる空間 $\mathfrak{C}P_2$ を

$$\mathfrak{C}P_2=\{X\in\mathfrak{J}\,|\,X^2=X, \mathrm{tr}(X)=1\}$$

で定義する．

定理2.21 $$F_4/Spin(9)\simeq\mathfrak{C}P_2.$$

特に F_4 は連結である．

証明　$\alpha\in F_4$，$X\in\mathfrak{C}P_2$ ならば $\alpha X\in\mathfrak{C}P_2$ であるから，F_4 は $\mathfrak{C}P_2$ に働く．$(F_4)_0$ が $\mathfrak{C}P_2$ に推移的に働くことを示そう．そのためには，任意の $X\in\mathfrak{C}P_2$ がある $\alpha\in(F_4)_0$ により $\alpha X=E_1\in\mathfrak{C}P_2$ となることを示せばよい．さて，$X\in\mathfrak{C}P_2$ を $\alpha\in(F_4)_0$ により

$$\alpha X=\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & \xi_3\end{pmatrix},\quad \xi_i\in\boldsymbol{R}$$

と変形する(命題2.20)．条件 $X\circ X=X$ より $\alpha X\circ\alpha X=\alpha X$ となるので，$\xi_i{}^2=\xi_i$ となり，$\xi_i=1$ または $\xi_i=0$，$i=1,2,3$ となる．さらに $\mathrm{tr}(\alpha X)=\mathrm{tr}(X)$(補題2.2)$=1$ より $\xi_i=1$，$\xi_{i+1}=\xi_{i+2}=0$，すなわち $\alpha X=E_i$ となる．しかるに E_2 は $(F_4)_0$ の元で E_1 に移される．実際，$T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\in SO(3)$ を用いて $\beta:\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ を $\beta X=TXT^{-1}$ をつくると $\beta\in(F_4)_0$ であり，$\beta E_2=E_1$ となる．よって $\beta\alpha X=E_1$ となる．$\alpha X=E_3$ のときも同様である．以上で $(F_4)_0$ の推移性が示された．これより $\mathfrak{C}P_2=(F_4)_0E_1$ となるので，$\mathfrak{C}P_2$ は連結である．さて，F_4 は $\mathfrak{C}P_2$ に推移的に働き，$E_1\in\mathfrak{C}P_2$ における F_4 の等方群は $Spin(9)$ である(定理2.10)．よって同相 $F_4/Spin(9)\simeq\mathfrak{C}P_2$ を得る．$\mathfrak{C}P_2$ と $Spin(9)$ が連結であるから，F_4 も連結である．

Cayley 射影平面 $\mathfrak{C}P_2$ は $\mathfrak{C}P_2=e^0\cup e^8\cup e^{16}$ と胞体分割される([1]定理29)ので単連結であることが分かる．$\mathfrak{C}P_2$ と $Spin(9)$ の単連結性から F_4 の単連結性が出る．(F_4 が F_4 型の Lie 群である (定理2.39) であることを知ると，連結な compact F_4 型 Lie 群は単連結であることが compact Lie 群の一般論で知られている)．

定理2.22　F_4 は単連結 compact Lie 群で，その次元は 52 である．

6　F_4 の対合自己同型写像 σ と部分群 $Spin(9)$

定義　$\boldsymbol{R}$-線型写像 $\sigma:\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ を

$$\sigma\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & -x_3 & -\overline{x}_2\\ -\overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ -x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}$$

で定義する．$\sigma\in F_4$ であり，かつ $\sigma^2=1$ である．(この σ は定理2.10の $\sigma=(1,-1,-1)\in Spin(8)\subset F_4$ と一致している)．

F_4 の部分群

$$(F_4)^\sigma=\{\alpha\in F_4 \mid \sigma\alpha=\alpha\sigma\}$$

を調べよう．そのために，$\mathfrak{J}$ の σ による固有空間

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_\sigma&=\{X\in\mathfrak{J} \mid \sigma X=X\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & x_1\\ 0 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}\middle|\ \xi_i\in\boldsymbol{R},\ \ x_1\in\mathfrak{C}\right\}\\ &=\{X\in\mathfrak{J} \mid E_1\circ X=0\}\oplus\{\xi E_1 \mid \xi\in\boldsymbol{R}\}\\ &=\mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})\oplus\mathfrak{C}_1\\ \mathfrak{J}_{-\sigma}&=\{X\in\mathfrak{J} \mid \sigma X=-X\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_3 & \overline{x_2}\\ \overline{x_3} & 0 & 0\\ x_2 & 0 & 0\end{pmatrix}\middle|\ x_i\in\mathfrak{C}\right\}\\ &=\{X\in\mathfrak{J} \mid 2E_1\circ X=X\}\end{aligned}$$

を考える．$\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_\sigma\oplus\mathfrak{J}_{-\sigma}$ であり，かつ $\mathfrak{J}_\sigma$，$\mathfrak{J}_{-\sigma}$ は $(F_4)^\sigma$ の作用で不変である．

定理2.23 $\qquad (F_4)^\sigma=(F_4)_{E_1}\cong Spin(9).$

証明 $\alpha\in(F_4)^\sigma$ とする．まず

$$\alpha E_2,\ \alpha E_3\in\mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})$$

を示そう．実際，$\alpha E_2=\alpha(-F_2(1)\times F_2(1))=-\alpha F_2(1)\times\alpha F_2(1)=-(F_2(x_2)+F_3(x_3))\times(F_2(x_2)+F_3(x_3))$ $(x_2, x_3\in\mathfrak{C})$ $=(x_2,x_2)E_2+(x_3,x_3)E_3-F_1(\overline{x_2x_3})\in\mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})$ となる．同様に $\alpha E_3\in\mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})$ である．よって，$\alpha E_1=\alpha(E-E_2-E_3)=E-\alpha E_2-\alpha E_3$ より

$$\alpha E_1=E_1+\xi_2E_2+\xi_3E_3+F_1(x)$$

とおくことができる．$\alpha E_1\times\alpha E_1=\alpha(E_1\times E_1)=0$ より $(\xi_2\xi_3-(x,x))E_1+\xi_3E_2+\xi_2E_3-F_1(x)=0$ となるので $\xi_2=\xi_3=0$，$x=0$ を得る．よって $\alpha E_1=E_1$，すなわち $\alpha\in(F_4)_{E_1}$ である．逆に $\alpha\in(F_4)_{E_1}$ とする．$\mathfrak{J}_\sigma=\{X\in\mathfrak{J} \mid E_1\circ X=0\}\oplus\mathfrak{C}_1$，$\mathfrak{J}_{-\sigma}=\{X\in\mathfrak{J} \mid 2E_1\circ X=X\}$ の表示から分かるように，$\mathfrak{J}_\sigma$，$\mathfrak{J}_{-\sigma}$ は α で不変であり，かつ $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_\sigma\oplus\mathfrak{J}_{-\sigma}$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha\sigma X&=\alpha\sigma(X_1+X_2) \qquad X_1\in\mathfrak{J}_\sigma,\ X_2\in\mathfrak{J}_{-\sigma}\\ &=\alpha(X_1-X_2)=\alpha X_1-\alpha X_2=\sigma(\alpha X_1)+\sigma(\alpha X_2)\\ &=\sigma\alpha(X_1+X_2)=\sigma\alpha X \qquad X\in\mathfrak{J}\end{aligned}$$

となり，$\alpha\sigma=\sigma\alpha$ すなわち $\alpha\in(F_4)^\sigma$ である．以上で $(F_4)^\sigma=(F_4)_{E_1}\cong Spin(9)$（定理2.10）が証明された．

7　F_4 の中心 $z(F_4)$

定理2.24　群 F_4 の中心 $z(F_4)$ は 1 のみからなる：$z(F_4)=\{1\}$.

証明　$\alpha\in z(F_4)$ とする．$\sigma\alpha=\alpha\sigma$ より $\alpha\in Spin(9)$ であり (定理2.23)，さらに $\alpha\in z(Spin(9))$ である．$z(Spin(9))$ は位数 2 の群である ([3]定理9.11) から

$$\alpha=1 \quad \text{または} \quad \alpha=\sigma$$

となる．しかるに $\sigma\notin z(F_4)$ である（定理2.23）から，$\alpha=1$ である．

8　F_4 の対合自己同型写像 γ と部分群 $(Sp(1)\times Sp(3))/Z_2$

定義　$\boldsymbol{R}$-線型写像 $\gamma:\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ を

$$\gamma\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & \gamma x_3 & \overline{\gamma x_2}\\ \overline{\gamma x_3} & \xi_2 & \gamma x_1\\ \gamma x_2 & \overline{\gamma x_1} & \xi_3\end{pmatrix}$$

で定義する．この γ は $\gamma\in G_2$ を $\gamma\in G_2\subset Spin(8)\subset F_4$ とみなしたものである．

F_4 の部分群

$$(F_4)^\gamma=\{\alpha\in F_4\,|\,\gamma\alpha=\alpha\gamma\}$$

を調べよう．そのため，$\mathfrak{J}$ の γ による固有空間

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_\gamma&=\{X\in\mathfrak{J}\,|\,\gamma X=X\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}\mu_1 & m_3 & \overline{m}_2\\ \overline{m}_3 & \mu_2 & m_1\\ m_2 & \overline{m}_1 & \mu_3\end{pmatrix}\middle|\,\mu_i\in\boldsymbol{R},\ m_i\in\boldsymbol{H}\right\}=\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H}),\\ \mathfrak{J}_{-\gamma}&=\{X\in\mathfrak{J}\,|\,\gamma X=-X\}\\ &=\left\{F(\boldsymbol{a}e)=\begin{pmatrix}0 & a_3e & -a_2e\\ -a_3e & 0 & a_1e\\ a_2e & -a_1e & 0\end{pmatrix}\middle|\,\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\in\boldsymbol{H}^3\right\}\end{aligned}$$

を考える．$\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_\gamma\oplus\mathfrak{J}_{-\gamma}$ であり，$\mathfrak{J}_\gamma$，$\mathfrak{J}_{-\gamma}$ は $(F_4)^\gamma$ の作用で不変である．

補題2.25　$\mathfrak{J}$ において

(1)　$M\times F(\boldsymbol{a}e)=-\dfrac{1}{2}F((\boldsymbol{a}M)e)$,　　　$M\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})$，$\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{H}^3$

(2) $F(\boldsymbol{a}e)\times F(\boldsymbol{b}e)=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}),\qquad \boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{H}^3$

(3) $(F(\boldsymbol{a}e),\,F(\boldsymbol{b}e))=2(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}),\qquad \boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{H}^3$

が成り立つ．ここに $(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b})$ は $(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^*)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a})$ で定義された $\boldsymbol{H}^3$ の実数値をとる内積である．

証明 (1) $M\times F(\boldsymbol{a}e)=\sum_{i=1}^{3}(\mu_iE_i+F_i(m_i))\times\sum_{i=1}^{3}F_i(a_ie)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}F_i(-\mu_ia_ie+\overline{(a_{i+1}e)m_{i+2}}+\overline{m_{i+1}(a_{i+2}e)})$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}F_i((\mu_ia_i+a_{i+1}\overline{m}_{i+2}+a_{i+2}m_{i+1})e)$$

$$=-\frac{1}{2}F((\boldsymbol{a}M)e).$$

(2) $F(\boldsymbol{a}e)\times F(\boldsymbol{b}e)=\sum_{i=1}^{3}F_i(a_ie)\times\sum_{i=1}^{3}F_i(b_ie)$

$$=-\sum_{i=1}^{3}(a_ie,\,b_ie)E_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}F_i(\overline{(a_{i+1}e)(b_{i+2}e)}+\overline{(b_{i+1}e)(a_{i+2}e)})$$

$$=-\sum_{i=1}^{3}(a_i,\,b_i)E_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}F_i(\overline{a}_{i+1}b_{i+2}+\overline{b}_{i+1}a_{i+2})$$

$$=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}).$$

(3) (2) の trace をとると，$\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(F(\boldsymbol{a}e))\mathrm{tr}(F(\boldsymbol{b}e))-(F(\boldsymbol{a}e),\,F(\boldsymbol{b}e)))=-(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b})$（補題2.1）より $(F(\boldsymbol{a}e),\,F(\boldsymbol{b}e))=2(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b})$ を得る．

$M+\boldsymbol{a}\in\mathfrak{J}(3,\,\boldsymbol{H})\oplus\boldsymbol{H}^3$ と $M+F(\boldsymbol{a}e)\in\mathfrak{J}$ を同一視して

$$\mathfrak{J}(3,\,\boldsymbol{H})\oplus\boldsymbol{H}^3=\mathfrak{J}$$

とみなす．$\mathfrak{J}(3,\,\boldsymbol{H})\oplus\boldsymbol{H}^3$ に積 $X\times Y$，内積 $(X,\,Y)$，$\boldsymbol{R}$-線型写像 γ をそれぞれ

$$(M+\boldsymbol{a})\times(N+\boldsymbol{b})=\Big(M\times N-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a})\Big)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}N+\boldsymbol{b}M),$$

$$(M+\boldsymbol{a},\,N+\boldsymbol{b})=(M,\,N)+2(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}),$$

$$\gamma(M+\boldsymbol{a})=M-\boldsymbol{a}$$

で定義する．これらは $\mathfrak{J}$ のそれらに対応している（補題2.25）．

$F_{4,\boldsymbol{H}}$ を Jordan 代数 $\mathfrak{J}_{\boldsymbol{H}}=\mathfrak{J}(3,\,\boldsymbol{H})$（ここには $\mathfrak{J}$ と同じような Jordan 積,

Freudenthal 積が定義されている）の自己同型群とする：

$$F_{4,H}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J}_H)\mid \alpha(M\circ N)=\alpha M\circ\alpha N\}$$
$$=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J}_H)\mid \alpha(M\times N)=\alpha M\times\alpha N\}.$$

命題2.26　$F_{4,H}\cong Sp(3)/\boldsymbol{Z}_2,\ \ \boldsymbol{Z}_2=\{E,-E\}.$

証明　写像 $\varphi: Sp(3)\to F_{4,H}$ を

$$\varphi(A)M=AMA^*,\quad M\in\mathfrak{J}_H$$

で定義する．$\varphi(A)\in F_{4,H}$ および φ が群準同型写像であることは明らかである．φ の全射を示そう．$\alpha\in F_{4,H}$ とする．$\alpha E_i\circ\alpha E_i=\alpha E_i$，$\mathrm{tr}(\alpha E_i)=1$（補題2.2）（$\alpha E_i\in \boldsymbol{H}P_2$）となるから，$\alpha E_i=A_iE_iA_i^*$，$A_i\in Sp(3)$ と表わせる（[1]補題26）．行列 A_i の第 i 列を $\boldsymbol{a}_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\a_{i3}\end{pmatrix}$ とすると，$\alpha E_i=$
$\begin{pmatrix}a_{i1}\overline{a}_{i1} & a_{i1}\overline{a}_{i2} & a_{i1}\overline{a}_{i3}\\ a_{i2}\overline{a}_{i1} & a_{i2}\overline{a}_{i2} & a_{i2}\overline{a}_{i3}\\ a_{i3}\overline{a}_{i1} & a_{i3}\overline{a}_{i2} & a_{i3}\overline{a}_{i3}\end{pmatrix}$ となるから，行列 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ をつくると

$$\alpha E_i=AE_iA^*,\quad i=1,2,3$$

となる．$AA^*=A(E_1+E_2+E_3)A^*=\alpha E_1+\alpha E_2+\alpha E_3=\alpha E=E$ より $A\in Sp(3)$ である．したがって $\beta=\varphi(A)^{-1}\alpha$ とおくと，$\beta\in F_{4,H}$ であって

$$\beta E_i=E_i,\quad i=1,2,3$$

となる．定理2.7と同様に，β は $\boldsymbol{R}$-同型写像 $\beta_1,\beta_2,\beta_3:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ を誘導し，$\beta_i\in O(4)=O(\boldsymbol{H})$ であって

$$(\beta_1 m)(\beta_2 n)=\overline{\beta_3(\overline{mn})},\quad m,n\in\boldsymbol{H}\qquad \text{(i)}$$

が成り立つ．$p=\beta_1 1$，$q=\beta_2 1$ とおくと $|p|=|q|=1$ である．(i) において，それぞれ $m=1$，$n=1$ とおくと $p(\beta_2 n)=\overline{\beta_3\overline{n}}$，$(\beta_1 m)q=\overline{\beta_3\overline{m}}$ となるので

$$\beta_2 m=\overline{p}(\beta_1 m)q,\quad \beta_3 m=\overline{(\beta_1\overline{m})q}$$

となる．$\zeta m=\overline{p}(\beta_1 m)$ とおき (i) に代入すると，ζ は

$$(\zeta m)(\zeta n)=\zeta(mn)$$

すなわち $\zeta\in\mathrm{Aut}(\boldsymbol{H})$ である．よって ζ は $r\in Sp(1)$ を用いて $\zeta m=rm\overline{r}$ と表せる（[3]定理10.6）．結局

$$\beta_1 m=prm\overline{r},\quad \beta_2 m=rm\overline{r}q,\quad \beta_3 m=\overline{q}rm\overline{r}\overline{p},\quad m\in\boldsymbol{H}$$

となる．行列 $B=\begin{pmatrix} \overline{q}r & 0 & 0 \\ 0 & pr & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ をつくると，$B=Sp(3)$ であって

$$\beta M=BMB^*,\quad M\in\mathfrak{J}_H$$

すなわち $\beta=\varphi(B)$ となる．よって $\alpha=\varphi(A)\beta=\varphi(A)\varphi(B)=\varphi(AB)$，$AB\in Sp(3)$ となり，φ の全射が示された．Ker $\varphi=\{E,-E\}$ は容易である．よって Lie 群の同型 $Sp(3)/\boldsymbol{Z}_2\cong F_{4,H}$ を得る．

定理2.27 $(F_4)^\gamma\cong(Sp(1)\times Sp(3))/\boldsymbol{Z}_2$，$\boldsymbol{Z}_2=\{(1,E),(-1,-E)\}$.

証明 写像 φ : $Sp(1)\times Sp(3)\to(F_4)^\gamma$ を

$$\varphi(p,A)(M+\boldsymbol{a})=AMA^*+p\boldsymbol{a}A^*,\quad M+\boldsymbol{a}\in\mathfrak{J}_H\oplus\boldsymbol{H}^3=\mathfrak{J}$$

で定義する．そのために，まず $\varphi(p,A)\in(F_4)^\gamma$ を証明しなければならない．実際，$p\in Sp(1)$，$A\in Sp(3)$，$M,N\in\mathfrak{J}_H$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{H}^3$ に対し

$$AMA^*\times ANA^*=A(M\times N)A^*,$$
$$(p\boldsymbol{a}A^*)^*(p\boldsymbol{b}A^*)=A(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b})A^*,$$
$$(p\boldsymbol{a}A^*)(ANA^*)=p(\boldsymbol{a}N)A^*$$

等が成り立つので $\varphi(p,A)\in F_4$ が分かる．さらに $\gamma\varphi(p,A)=\varphi(p,A)\gamma$ であるから $\varphi(p,A)\in(F_4)^\gamma$ である．明らかに φ は群準同型写像である．φ の全射を示そう．$\alpha\in(F_4)^\gamma$ とする．α の $\mathfrak{J}_\gamma=\mathfrak{J}_H$ への制限 $\alpha'=\alpha|\mathfrak{J}_H$ は $\alpha'\in F_{4,H}$ であるから，ある $A\in Sp(3)$ を用いて

$$\alpha M=AMA^*,\quad M\in\mathfrak{J}_H$$

となる(命題2.26)．$\beta=\varphi(1,A)^{-1}\alpha$ とおくと $\beta|\mathfrak{J}_H=1$ となる．$\beta\in G_2$ である．(実際，$\beta\in Spin(7)$ であるから $\beta=(\beta_1,\beta,\kappa\beta)$ とおくとき，$(\beta_1x)(\beta y)=\beta(xy)$, $x,y\in\mathfrak{C}$ となるが，$y=1$ とおくと $\beta_1=\beta$ となる)．$\beta\in(G_2)^\gamma$ で $\beta|\boldsymbol{H}=1$ であるから，$p\in Sp(1)$ が存在して

$$\beta(m+ae)=m+(pa)e,\quad m+ae\in\boldsymbol{H}\oplus\boldsymbol{H}e=\mathfrak{C}$$

となる（定理1.13)．よって

$$\beta(M+F(\boldsymbol{a}e))=M+F((p\boldsymbol{a})e)=\varphi(p,E)(M+F(\boldsymbol{a}e))$$

すなわち $\beta=\varphi(p,E)$ である．よって $\alpha=\varphi(1,A)\beta=\varphi(1,A)\varphi(p,E)=\varphi(p,A)$ となり，φ の全射が示された．Ker $\varphi=\{(1,E),(-1,-E)\}=\boldsymbol{Z}_2$ は容易である．よって Lie 群の同型 $(Sp(1)\times Sp(3))/\boldsymbol{Z}_2\cong(F_4)^\gamma$ を得る．

9　$\mathfrak{f}_4{}^C$ の単純性

$\mathfrak{J}^C=\{X_1+iX_2\,|\,X_i\in\mathfrak{J}\}$ を Jordan 代数 $\mathfrak{J}$ の複素化とする．$\mathfrak{J}$ と同様に，$\mathfrak{J}^C$ にも積 $X\circ Y$，$X\times Y$，内積 (X, Y)，$\mathrm{tr}(X, Y, Z)$，(X, Y, Z)，行列式 det X が定義され，$\mathfrak{J}$ のときと同様なこと（補題2.1）が成り立つ．この $\mathfrak{J}^C$ を**複素例外 Jordan 代数**という．$\mathfrak{J}^C$ における複素共役 τ は

$$\tau(X\circ Y)=\tau X\circ\tau Y,\quad \tau(X\times Y)=\tau X\times\tau Y$$

を満たしている．

C-Lie 環 $\mathfrak{e}_6{}^C$，$\mathfrak{f}_4{}^C$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_6{}^C&=\{\phi\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,(\phi X, X, X)=0\}\\&=\{\phi\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,-{}^t\phi(X\times Y)=\phi X\times Y+X\times\phi Y\},\\\mathfrak{f}_4{}^C&=\{\delta\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\delta(X\circ Y)=\delta X\circ Y+X\circ\delta Y\}\\&=\{\delta\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\delta(X\times Y)=\delta X\times Y+X\times\delta Y\}\end{aligned}$$

で定義する．これらはそれぞれ Lie 環 $\mathfrak{e}_{6(-26)}$，$\mathfrak{f}_4$ の 複素化であり，F_4, **4** で述べた $\mathfrak{e}_{6(-26)}$，$\mathfrak{f}_4$ の性質はそのまま $\mathfrak{e}_6{}^C$，$\mathfrak{f}_4{}^C$ でも成り立っている．

$A\in\mathfrak{J}^C$ に対し C-線型写像 $\tilde{A}:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ を

$$\tilde{A}X=A\circ X$$

で定義する．

命題2.28　(1)　$A\in\mathfrak{J}^C$，$\mathrm{tr}(A)=0$ ならば $\tilde{A}\in\mathfrak{e}_6{}^C$ である．

(2)　$A, B\in\mathfrak{J}^C$ に対し $[\tilde{A}, \tilde{B}]\in\mathfrak{f}_4{}^C$ である．

証明　(1)　$(\tilde{A}X, X, X)=(A\circ X, X\circ X)=(A, X\circ(X\times X))=(A, (\det X)E)$（補題2.1）$=(\det X)(A, E)=(\det X)\mathrm{tr}(A)=0$, $X\in\mathfrak{J}^C$．よって $\tilde{A}\in\mathfrak{e}_6{}^C$ である．

(2)
$$[\tilde{A}, \tilde{B}]=\Big[\Big(A-\frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)E\Big)^{\sim},\Big(B-\frac{1}{3}\mathrm{tr}(B)E\Big)^{\sim}\Big]\in\boldsymbol{e}_6{}^C,$$
$$[\tilde{A}, \tilde{B}]E=\tilde{A}(\tilde{B}E)-\tilde{B}(\tilde{A}E)=A\circ B-B\circ A=0$$

となる．よって $[\tilde{A}, \tilde{B}]\in\mathfrak{f}_4{}^C$ である（定理2.12）．

定理2.18によると，$\delta\in\mathfrak{f}_4{}^C$ は

$$\delta=D+\tilde{A}_1(a_1)+\tilde{A}_2(a_2)+\tilde{A}_3(a_3),\quad D\in\mathfrak{d}_4{}^C,\quad a_i\in\mathfrak{C}^C$$

（ここに $A_i(a_i)\in(\mathfrak{M}^-)^C$）と一意に表されていた．

補題2.29 $\mathfrak{f}_4{}^C$ において

$$[\widetilde{E}_i, \widetilde{E}_j]=0, \qquad [\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i(a)]=0,$$

$$[\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_{i+1}(a)]=-\frac{1}{4}\widetilde{A}_{i+1}(a), \quad [\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_{i+2}(a)]=\frac{1}{4}\widetilde{A}_{i+2}(a),$$

$$[\widetilde{F}_i(a), \widetilde{F}_i(b)]\in\mathfrak{d}_4{}^C, \qquad [\widetilde{F}_i(a), \widetilde{F}_{i+1}(b)]=-\frac{1}{4}\widetilde{A}_{i+2}(\overline{ab}),$$

$[D, \widetilde{A}_i(a)]=\widetilde{A}_i(D_ia)$, ここに $D=(D_1, D_2, D_3)\in\mathfrak{d}_4{}^C$,

$$[\widetilde{A}_i(a), \widetilde{A}_i(b)]\in\mathfrak{d}_4{}^C, \qquad [\widetilde{A}_i(a), \widetilde{A}_{i+1}(b)]=-\widetilde{A}_{i+2}(\overline{ab})$$

が成り立つ.

補題2.30 (1) $0\neq x\in\mathfrak{C}^C$ は $\mathfrak{d}_4{}^C$ の作用で $1\in\mathfrak{C}^C$ に移すことができる.

(2) $\mathfrak{C}^C$ は $\mathfrak{d}_4{}^C$-既約 C-加群である.

(3) $\mathfrak{d}_4{}^C\mathfrak{C}^C=\{\sum_i D_ia_i \mid D_i\in\mathfrak{d}_4{}^C, a_i\in\mathfrak{C}^C\}=\mathfrak{C}^C$.

証明 (1) $0\neq x=\sum_{i=0}^{7}x_ie_i$, $x_i\in C$ とする. $x_i\neq 0$, $i\neq 0$ のとき

$$x \xrightarrow{G_{0i}} x_ie_0-x_0e_i \xrightarrow{G_{j0}\,(j\neq i)} x_ie_j \xrightarrow{x_i{}^{-1}G_{0j}} e_0=1$$

となる. $x_0\neq 0$ のとき, G_{i0} を施すと上記に帰着される.

(2) $\{0\}\neq W\subset\mathfrak{C}^C$ を $\mathfrak{d}_4$-不変部分 C-加群とする. $e_0=1\in W$ ならば, $e_i=G_{i0}e_0\in W$, $i=1,\cdots,7$ より $W=\mathfrak{C}^C$ となる. さて $0\neq x\in W$ は $\mathfrak{d}_4{}^C$ で 1 に移る (上記(1)) ので $W=\mathfrak{C}^C$ になる.

(3) $\mathfrak{d}_4{}^C\mathfrak{C}^C$ は $\mathfrak{C}^C$ の $\mathfrak{d}_4{}^C$-不変 C-部分加群であるから, (2)より $\mathfrak{d}_4{}^C\mathfrak{C}^C=\mathfrak{C}^C$ となる.

定理2.31 C-Lie 環 $\mathfrak{f}_4{}^C$ は単純である. したがって Lie 環 $\mathfrak{f}_4$ も単純である.

証明 $\widetilde{\mathfrak{A}}_i{}^C=\{\widetilde{A}_i(a) \mid a\in\mathfrak{C}^C\}$, $\widetilde{\mathfrak{A}}^C=\widetilde{\mathfrak{A}}_1{}^C\oplus\widetilde{\mathfrak{A}}_2{}^C\oplus\widetilde{\mathfrak{A}}_3{}^C$ とおくと

$$\mathfrak{f}_4{}^C=\mathfrak{d}_4{}^C\oplus\widetilde{\mathfrak{A}}_1{}^C\oplus\widetilde{\mathfrak{A}}_2{}^C\oplus\widetilde{\mathfrak{A}}_3{}^C=\mathfrak{d}_4{}^C\oplus\widetilde{\mathfrak{A}}^C$$

となる. $p:\mathfrak{f}_4{}^C\to\mathfrak{d}_4{}^C$, $q:\mathfrak{f}_4{}^C\to\widetilde{\mathfrak{A}}^C$ を射影とする. さて, $\{0\}\neq\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{f}_4{}^C$ の ideal とする. $p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{d}_4{}^C$ の ideal である. 実際, $D\in p(\mathfrak{a})$ とすると, $a_i\in\mathfrak{C}^C$ が存在して $D+\sum_{i=1}^{3}\widetilde{A}_i(a_i)\in\mathfrak{a}$ となる. 任意の $D'\in\mathfrak{d}_4{}^C$ に対して

$$\mathfrak{a}\ni[D', D+\sum_{i=1}^{3}\widetilde{A}_i(a_i)]=[D', D]+\sum_{i=1}^{3}\widetilde{A}_i(D_i'a_i)$$

(補題2.29) となるので $[D', D] \in p(\mathfrak{a})$ である．

(1) $\mathfrak{d}_4{}^C \cap \mathfrak{a} = \{0\}$, $\widetilde{\mathfrak{A}}^C \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ のとき（この場合は起らない）．$\widetilde{\mathfrak{A}}^C \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ であるから，$p|\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{d}_4{}^C$ は単射である．$\{0\} \neq p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{d}_4{}^C$ の ideal で，$\mathfrak{d}_4{}^C$ は単純である（[3]定理11.6）から，$p(\mathfrak{a}) = \mathfrak{d}_4{}^C$ である．よって $\dim_C \mathfrak{a} = \dim_C p(\mathfrak{a}) = \dim_C \mathfrak{d}_4{}^C = 28$ である．一方，$\mathfrak{d}_4{}^C \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ であるから，$q|\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \to \widetilde{\mathfrak{A}}^C$ も単射である．よって $\dim_C \mathfrak{a} \leqq \dim_C \widetilde{\mathfrak{A}}^C = 8 \times 3 = 24$ となり，上記に矛盾する．

(2) $\mathfrak{d}_4{}^C \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ のとき．$\mathfrak{d}_4{}^C$ は単純であるから $\mathfrak{d}_4{}^C \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{d}_4{}^C$ となり，$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{d}_4{}^C$ である．一方

$$\mathfrak{a} \supset [\mathfrak{a}, \mathfrak{f}_4{}^C] \supset [\mathfrak{d}_4{}^C, \widetilde{\mathfrak{A}}_i{}^C] = \widetilde{\mathfrak{A}}_i{}^C, \quad i = 1, 2, 3$$

となる．(最後の等号は，$[D, \widetilde{A}_i(a_i)] = \widetilde{A}_i(D_i a_i)$ (補題2.29) と補題2.30 (3)から分かる)．よって $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{d}_4{}^C \oplus \widetilde{\mathfrak{A}}_1{}^C \oplus \widetilde{\mathfrak{A}}_2{}^C \oplus \widetilde{\mathfrak{A}}_3{}^C = \mathfrak{f}_4{}^C$ となり $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}_4{}^C$ を得る．

(3) $\widetilde{\mathfrak{A}}^C \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ のとき．$0 \neq \widetilde{A}_1(a_1) + \widetilde{A}_2(a_2) + \widetilde{A}_3(a_3) \in \widetilde{\mathfrak{A}}^C \cap \mathfrak{a}$ をとる．$a_1 \neq 0$ ならば，$\mathfrak{d}_4{}^C$ の作用により $\widetilde{A}_1(1) + \widetilde{A}_2(b) + \widetilde{A}_3(c) \in \mathfrak{a}$ となる (補題2.30 (1))．$b = c = 0$ ならば $0 \neq [\widetilde{A}_1(1), \widetilde{A}_1(e_1)] \in \mathfrak{d}_4{}^C \cap \mathfrak{a}$ (補題2.29) となり (2) に帰着される．$b \neq 0$ ならば $\widetilde{A}_1(1)$ との Lie 積をとり，$-\widetilde{A}_3(\overline{b}) + \widetilde{A}_2(\overline{c}) \in \mathfrak{a}$，さらに $\mathfrak{d}_4{}^C$ の作用により $\widetilde{A}_3(1) + \widetilde{A}_2(c') \in \mathfrak{a}$ となる．$c' = 0$ ならば上記と同様に (2) に帰着される．$c' \neq 0$ ならば上記と同様の手順で (2) に帰着される．以上で $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}_4{}^C$ となり，$\mathfrak{f}_4{}^C$ の単純性が示された．

補題2.32 (1) $\delta \in \mathfrak{f}_4{}^C$，$A, B \in \mathfrak{J}^C$ に対し

$$[\delta, [\widetilde{A}, \widetilde{B}]] = [\widetilde{\delta A}, \widetilde{B}] + [\widetilde{A}, \widetilde{\delta B}]$$

が成り立つ．

(2) $\mathfrak{f}_4{}^C$ の元 δ は $\delta = \sum_i [\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i]$，$A_i, B_i \in \mathfrak{J}^C$ と表される．

証明 (1) $[\delta, [\widetilde{A}, \widetilde{B}]]X = \delta[\widetilde{A}, \widetilde{B}]X - [\widetilde{A}, \widetilde{B}]\delta X$

$$\begin{aligned}
&= \delta(A \circ (B \circ X) - B \circ (A \circ X)) - (A \circ (B \circ \delta X) - B \circ (A \circ \delta X)) \\
&= \delta A \circ (B \circ X) + A \circ (\delta B \circ X) + A \circ (B \circ \delta X) - \delta B \circ (A \circ X) - B \circ (\delta A \circ X) \\
&\quad - B \circ (A \circ \delta X) - A \circ (B \circ \delta X) + B \circ (A \circ \delta X) \\
&= \delta A \circ (B \circ X) - B \circ (\delta A \circ X) + A \circ (\delta B \circ X) - \delta B \circ (A \circ X) \\
&= [\widetilde{\delta A}, \widetilde{B}]X + [\widetilde{A}, \widetilde{\delta B}]X \qquad X \in \mathfrak{J}^C.
\end{aligned}$$

(2) $\mathfrak{a} = \{\sum_i [\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i] \mid \widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i \in \mathfrak{J}^C\}$ は $\mathfrak{f}_4{}^C$ の ideal である (上記 (1))．$\mathfrak{f}_4{}^C$ は単純である (定理2.31) から $\mathfrak{a} = \mathfrak{f}_4{}^C$ となる．

定理2.33 (1) $\mathfrak{J}_0{}^C=\{X\in\mathfrak{J}^C\,|\,\mathrm{tr}(X)=0\}$ は $\mathfrak{f}_4{}^C$-既約 C-加群である.

(2) $\mathfrak{f}_4{}^C\mathfrak{J}_0{}^C=\{\sum_i\delta_iT_i\,|\,\delta_i\in\mathfrak{f}_4{}^C,\ T_i\in\mathfrak{J}_0{}^C\}=\mathfrak{J}_0{}^C$.

証明 (1) $\mathfrak{f}_4{}^C$ は $\mathfrak{J}_0{}^C$ に働いている(補題2.2). $\{0\}\neq W$ を $\mathfrak{J}_0{}^C$ の $\mathfrak{f}_4{}^C$-不変部分 C-加群とする. もし W がある $F_i(x)\neq 0$ を含めば $W=\mathfrak{J}_0{}^C$ となる. 実際, $\mathfrak{d}_4{}^C$ の作用で $F_i(1)\in W$ となる (補題2.30). さらに

$$F_i(1)\xrightarrow{\tilde{A}_i(1)}E_{i+1}-E_{i+2}\xrightarrow{\tilde{A}_{i+2}(1)}F_{i+2}(1)\dashrightarrow F_{i+1}(1)$$

と $\tilde{A}_i(a)F_{i+2}(1)=F_{i+1}(\overline{a})$ 等より, E_i-E_{i+1}, $F_i(a)\in W$ となり $W=\mathfrak{J}_0{}^C$ となる. さて

$$0\neq X=\xi(E_1-E_2)+\eta(E_2-E_3)+F_1(x_1)+F_2(x_2)+F_3(x_3)\in W$$

をとる.

(i) $x_1\neq 0$ のとき, $\mathfrak{d}_4{}^C$ の元を施して $F_1(1)+F_2(y_2)+F_3(y_3)\in W$ となる. $y_2=y_3=0$ ならば上述より $W=\mathfrak{J}_0{}^C$ となる. $y_2\neq 0$ ならば, $(y_2,a)=0$ なる $0\neq a\in\mathfrak{C}^C$ をとり, $\tilde{A}_2(a)$ を施すと $-F_3(\overline{a})+F_1(\overline{ay_3})\in W$ となるが, さらに $\mathfrak{d}_4{}^C$ の作用で $F_3(1)+F_1(z_1)\in W$ となる. $z_1=0$ ならば $W=\mathfrak{J}_0{}^C$ となるが, $z_1\neq 0$ のときには $(z_1,b)=0$ となる $0\neq b\in\mathfrak{C}^C$ をとり $\tilde{A}_1(b)$ を施すと $F_2(\overline{b})\in W$ となり, やはり $W=\mathfrak{J}_0{}^C$ となる. $x_2\neq 0$, $x_3\neq 0$ のときも同様である.

(ii) $x_1=x_2=x_3=0$ のとき, $0\neq X=\xi(E_1-E_2)+\eta(E_2-E_3)$ に $\tilde{A}_1(1)$ を施して $F_1(\xi-2\eta)\in W$ となる. $\xi-2\eta\neq 0$ なら $W=\mathfrak{J}_0{}^C$ となる. $\xi-2\eta=0$ ならば $\tilde{A}_2(1)$ を施して $F_3(3\eta)\in W$ となり, やはり $W=\mathfrak{J}_0{}^C$ となる. 以上で証明された.

(2) $\mathfrak{f}_4{}^C\mathfrak{J}_0{}^C$ は $\mathfrak{J}_0{}^C$ の $\mathfrak{f}_4{}^C$-不変 C-部分加群であるから, (1)より $\mathfrak{f}_4{}^C\mathfrak{J}_0{}^C=\mathfrak{J}_0{}^C$ となる.

10 $\mathfrak{f}_4{}^C$ の Killing 形式

補題2.34 $A,B,C,D\in\mathfrak{J}^C$ に対し

$$([\tilde{A},\tilde{B}]C,D)=([\tilde{C},\tilde{D}]A,B)$$

が成り立つ.

証明 $([\tilde{A},\tilde{B}]C,D)=(A\circ(B\circ C),D)-(B\circ(A\circ C),D)$

$$=(B\circ C, A\circ D)-(A\circ C, B\circ D)$$
$$=(C\circ(D\circ A), B)-(D\circ(C\circ A), B)=([\tilde{C}, \tilde{D}]A, B).$$

定義 $\mathfrak{f}_4{}^C$ に内積 $(\delta_1, \delta_2)_4$ を

$$(\delta, [\tilde{A}, \tilde{B}])_4=(\delta A, B), \quad \delta\in\mathfrak{f}_4{}^C, \ A, B\in\mathfrak{J}^C$$

を満たすように定義する．もっと詳しくいうならば，$\delta_1=\sum_i[\tilde{A}_i, \tilde{B}_i]$，$\delta_2=\sum_j[\tilde{C}_j, \tilde{D}_j]$，$A_i, B_i, C_j, D_j\in\mathfrak{J}^C$ で表す（補題2.32）とき

$$(\delta_1, \delta_2)_4=\sum_{i,j}([\tilde{A}_i, \tilde{B}_i]C_j, D_j)=\sum_{i,j}([\tilde{C}_j, \tilde{D}_j]A_i, B_i)$$

で定義する（補題2.34）．（この定義は δ_1，δ_2 の表示によらず，かつ対称である：$(\delta_1, \delta_2)_4=(\delta_2, \delta_1)_4$（補題2.34））．

補題2.35 $\mathfrak{f}_4{}^C$ の内積 $(\delta_1, \delta_2)_4$ は $\mathfrak{f}_4{}^C$-不変である：

$$([\delta, \delta_1], \delta_2)_4+(\delta_1, [\delta, \delta_2])_4=0, \quad \delta, \delta_i\in\mathfrak{f}_4{}^C.$$

証明 $\delta_1=[\tilde{A}, \tilde{B}]$, $\delta_2=[\tilde{C}, \tilde{D}]$, $A, B, C, D\in\mathfrak{J}^C$ のときに示せば十分である（補題2.32）．

$$([\delta, [\tilde{A}, \tilde{B}]], [\tilde{C}, \tilde{D}])_4+([\tilde{A}, \tilde{B}], [\delta, [\tilde{C}, \tilde{D}]])_4$$
$$=(([\widetilde{\delta A}, \tilde{B}]+[\tilde{A}, \widetilde{\delta B}]), [\tilde{C}, \tilde{D}])_4+([\tilde{A}, \tilde{B}]([\widetilde{\delta C}, \tilde{D}]+[\tilde{C}, \widetilde{\delta D}]))_4$$

（補題2.32）

$$=([\widetilde{\delta A}, \tilde{B}]C, D)+([\tilde{A}, \widetilde{\delta B}]C, D)+([\tilde{A}, \tilde{B}]\delta C, D)+([\tilde{A}, \tilde{B}]C, \delta D)$$
$$=(\delta A\circ(B\circ C), D)-(B\circ(\delta A\circ C), D)+(A\circ(\delta B\circ C), D)-(\delta B\circ(A\circ C), D)$$
$$+(A\circ(B\circ\delta C), D)-(B\circ(A\circ\delta C), D)+(A\circ(B\circ C), \delta D)-(B\circ(A\circ C), \delta D).$$

最後の 2 つの式に $(X\circ Y, \delta Z)=-(\delta X\circ Y, Z)-(X\circ\delta Y, Z)$ の公式を用いると，上式 $=0$ となる．

定理2.36 $\mathfrak{f}_4{}^C$ の Killing 形式 B_4 は

$$B_4(\delta_1, \delta_2)=9(\delta_1, \delta_2)_4=3\,\mathrm{tr}(\delta_1\delta_2), \quad \delta_i\in\mathfrak{f}_4{}^C$$

で与えられる．

証明 $\mathfrak{f}_4{}^C$ は単純である（定理2.31）から，$\varkappa, \varkappa'\in C$ が存在して

$$B_4(\delta_1, \delta_2)=\varkappa(\delta_1, \delta_2)_4=\varkappa'\,\mathrm{tr}(\delta_1\delta_2), \quad \delta_i\in\mathfrak{f}_4{}^C$$

となる（補題2.35，［3］命題12.3）．$\varkappa$，$\varkappa'$ を求めるために，$\delta_1=\delta_2=\tilde{A}_1(1)$ と

おく．補題2.29を用いて

$$(\widetilde{A}_1(1), \widetilde{A}_1(1))_4 = -4(\widetilde{A}_1(1), [\widetilde{E}_3, \widetilde{F}_1(1)])_4 = -4(\widetilde{A}_1(1)E_3, F_1(1))$$
$$= -4(F_1(1), F_1(1)) = -4\times 2 = -8$$

となる．一方

$$[\widetilde{A}_1(1), [\widetilde{A}_1(1), G_{i0}]] = -[\widetilde{A}_1(1), \widetilde{A}_1(e_i)] = -4G_{i0},$$
$$[\widetilde{A}_1(1), [\widetilde{A}_1(1), \widetilde{A}_1(e_i)]] = [\widetilde{A}_1(1), 4G_{i0}] = -4\widetilde{A}_1(e_i),$$
$$[\widetilde{A}_1(1), [\widetilde{A}_1(1), \widetilde{A}_2(e_i)]] = -[\widetilde{A}_1(1), \widetilde{A}_3(\overline{e}_i)] = -\widetilde{A}_2(e_i),$$
$$[\widetilde{A}_1(1), [\widetilde{A}_1(1), \widetilde{A}_3(e_i)]] = [\widetilde{A}_1(1), A_2(\overline{e}_i)] = -\widetilde{A}_3(e_i)$$

（その他 $=0$）の計算より

$$B_4(\widetilde{A}_1(1), \widetilde{A}_1(1)) = -4\times 7 - 4\times 7 - 8 - 8 = -72$$

となる．よって $\varkappa=9$ である．次に

$$\widetilde{A}_1(1)\widetilde{A}_1(1)E_1 = 0$$
$$\widetilde{A}_1(1)\widetilde{A}_1(1)E_2 = -\widetilde{A}_1(1)F_1(1) = -2(E_2 - E_3), \quad \widetilde{A}_1(1)^2E_3 = 2(E_2 - E_3),$$
$$\widetilde{A}_1(1)\widetilde{A}_1(1)F_1(1) = 2\widetilde{A}_1(1)(E_2 - E_3) = -4F_1(1),$$
$$\widetilde{A}_1(1)\widetilde{A}_1(1)F_2(e_i) = \widetilde{A}_1(1)F_3(\overline{e}_i) = -F_2(e_i), \quad \widetilde{A}_1(1)^2F_3(e_i) = -F_3(e_i)$$

（その他$=0$）の計算より

$$\mathrm{tr}(\widetilde{A}_1(1)^2) = -2\times 2 - 4 - 8\times 2 = -24$$

となる．よって $\varkappa'=3$ である．

補題2.37　$0 \neq A \in \mathfrak{J}_0{}^C$ ならば，$[\widetilde{A}, \widetilde{B}] \neq 0$ となる $B \in \mathfrak{J}_0{}^C$ が存在する．

証明　すべての $B \in \mathfrak{J}_0{}^C$ に対して $[\widetilde{A}, \widetilde{B}]=0$ とすると，任意の $\delta \in \mathfrak{f}_4{}^C$ に対し $0=(\delta, [\widetilde{A}, \widetilde{B}])_4 = -(A, \delta B)$ となる．$\mathfrak{f}_4{}^C\mathfrak{J}_0{}^C = \mathfrak{J}_0{}^C$ である（定理2.33）から $(A, \mathfrak{J}_0{}^C)=0$ となり $A=0$ を得る．

11　$\mathfrak{f}_4{}^C$ の root 系

$\mathfrak{f}_4{}^C$ の root を求める前に，Lie 環 $\mathfrak{D}_4{}^C = \{\mathfrak{D} \in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{C}^C) \mid (Dx, y)+(x, Dy)=0\}$ の root 系を復習しておく（[3]定理13.4）．$H_k = -iG_{k4+k}$，$k=0,1,2,3$ とおくとき

$$\mathfrak{h} = \{H = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k H_k \mid \lambda_k \in C\}$$

は $\mathfrak{D}_4{}^C$ の Cartan 部分環であり，$\mathfrak{h}$ に関する root は

$$\pm(\lambda_k-\lambda_l),\quad \pm(\lambda_k+\lambda_l),\qquad 0\leqq k<l\leqq 3$$

である．これらの root に属する root ベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_k-\lambda_l}&=(G_{kl}+G_{4+k\,4+l})-i(G_{k\,4+l}+G_{l\,4+k}),\\
E_{-\lambda_k+\lambda_l}&=i(G_{kl}+G_{4+k\,4+l})-(G_{k\,4+l}+G_{l\,4+k}),\\
E_{\lambda_k+\lambda_l}&=(G_{kl}-G_{4+k\,4+l})+i(G_{k\,4+l}-G_{l\,4+k}),\\
E_{-\lambda_k-\lambda_l}&=i(G_{kl}-G_{4+k\,4+l})+(G_{k\,4+l}-G_{l\,4+k})
\end{aligned}$$

である．

$\mathfrak{D}_4{}^C$ の外部自己同型写像 π, ν は $\mathfrak{h}$ の C-線型写像を誘導し，$\mathfrak{h}$ の C-基 H_0, H_1, H_2, H_3 に関する π, ν の行列表示はそれぞれ

$$\pi=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&1&1&1\\-1&-1&1&1\end{pmatrix},\quad \nu=\pi\varkappa=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&1&-1\\1&1&1&-1\\-1&1&1&1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$$

となる(補題1.15)．これらの行列は直交行列であることに注意しよう．最後に $\mathfrak{D}_4{}^C$ は次の対応で $\mathfrak{f}_4{}^C$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{d}_4{}^C$ と同一視されていたことも思い出そう（命題2.17，定理1.20)．

$$\mathfrak{D}_4{}^C\ni D\longrightarrow(D,\nu D,\varkappa\pi D)\in\mathfrak{d}_4{}^C\subset\mathfrak{f}_4{}^C.$$

定理2.38　C-Lie 環 $\mathfrak{f}_4{}^C$ の階数は 4 である．$\mathfrak{f}_4{}^C$ の(ある Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に関する）root 系は

$$\begin{gathered}
\pm(\lambda_k-\lambda_l),\quad \pm(\lambda_k+\lambda_l),\quad 0\leqq k<l\leqq 3,\\
\pm\lambda_1,\quad \pm\lambda_2,\quad \pm\lambda_3,\quad \pm\lambda_4,\\
\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3),\\
\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),\\
\pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3),\\
\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)
\end{gathered}$$

である．

証明　$$\mathfrak{f}_4{}^C=\mathfrak{d}_4{}^C\oplus\mathfrak{A}_1{}^C\oplus\mathfrak{A}_2{}^C\oplus\mathfrak{A}_3{}^C$$

の分解（定理2.31）を用いる．

$$\mathfrak{h}=\{H=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k \,|\, \lambda_k\in C\}$$

は $\mathfrak{d}_4{}^C=\mathfrak{D}_4{}^C$ の Cartan 部分環である（さらに $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{f}_4{}^C$ の Cartan 部分環にもなるものである）．

I　$\mathfrak{d}_4{}^C$ の root

$$\pm(\lambda_k-\lambda_l),\quad \pm(\lambda_k+\lambda_l),\qquad 0\leqq k<l\leqq 3$$

は $\mathfrak{f}_4{}^C$ の root でもある．

II　$[H,\tilde{A}_1(a)]=\tilde{A}_1(Ha)$（補題2.29）と

$$H(e_k+ie_{4+k})=-\sum_{j=0}^{3}\lambda_j iG_{j4+j}(e_k+ie_{4+k})$$
$$=-i\lambda_k(-e_{4+k}+ie_k)=\lambda_k(e_k+ie_{4+k})$$

より λ_k は $\mathfrak{f}_4{}^C$ の root であり，$\tilde{A}_1(e_k+ie_{4+k})$ がその root ベクトルである，$0\leqq k\leqq 4$．同様に $-\lambda_k$，$0\leqq k\leqq 3$ も root であり，$\tilde{A}_1(e_k-ie_{4+k})$ がその root ベクトルである．次に，$[H,\tilde{A}_2(a)]=\tilde{A}_2((\nu H)a)$（補題2.29）と

$$\nu H=\nu(\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k)$$
$$=\frac{1}{2}(\lambda_0(-H_0+H_1-H_2+H_3)+\lambda_1(-H_0+H_1+H_2-H_3)$$
$$+\lambda_2(H_0+H_1+H_2+H_3)+\lambda_3(-H_0-H_1+H_2+H_3))$$
$$=\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)H_0+\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)H_1$$
$$+\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)H_2+\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)H_3$$

より H_0, H_1, H_2, H_3 の係数が $\mathfrak{f}_4{}^C$ の root であることが分かる．$\tilde{A}_2(e_k+ie_{4+k})$，$0\leqq k\leqq 4$ がそれぞれの root ベクトルである．上記の root の符号を逆にしたものもまた root となっており，$\tilde{A}_2(e_k-ie_{4+k})$ が root ベクトルである．最後に，$[H,\tilde{A}_3(a)]=\tilde{A}_3((\varkappa\pi H)a)$ と

$$\varkappa\pi H=\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)H_0+\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)H_1$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)H_3+\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)H_3$$

より $\mathfrak{f}_4{}^C$ の残りの root を見つけることができる．root ベクトルと $\mathfrak{h}$ で $\mathfrak{f}_4{}^C$ を張るから，これらが root のすべてである．

定理2.39　$\mathfrak{f}_4{}^C$ の root 系（定理2.38）において

$$\alpha_1=\lambda_0-\lambda_1,\quad \alpha_2=\lambda_1-\lambda_2,\quad \alpha_3=\lambda_2,\quad \alpha_4=\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)$$

は基本 root 系であり，$\mathfrak{f}_4{}^C$ の Dynkin 図形は

$$\underset{\alpha_1}{\circ}\text{ —— }\underset{\alpha_2}{\circ}\Longrightarrow\underset{\alpha_3}{\circ}\text{ —— }\underset{\alpha_4}{\circ}$$

となる．

証明

$$\begin{aligned}
\lambda_0&=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\
\lambda_1&=\alpha_2+\alpha_3\\
\lambda_2&=\alpha_3\\
\lambda_3&=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_0+\lambda_1&=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 & \lambda_0-\lambda_1&=\alpha_1\\
\lambda_0+\lambda_2&=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 & \lambda_0-\lambda_2&=\alpha_1+\alpha_2\\
\lambda_0+\lambda_3&=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4 & -\lambda_0+\lambda_3&=\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4\\
\lambda_1+\lambda_2&=\alpha_2+2\alpha_3 & \lambda_1-\lambda_2&=\alpha_2\\
\lambda_1+\lambda_3&=\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4 & -\lambda_1+\lambda_3&=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4\\
\lambda_2+\lambda_3&=\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4 & -\lambda_2+\lambda_3&=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)&=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4\\
\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)&=\alpha_4\\
\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)&=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4\\
\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)&=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4\\
\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)&=\alpha_3+\alpha_4\\
\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)&=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\
\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)&=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\
\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)&=\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4
\end{aligned}$$

と表せるから $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ は基本 root 系である．$\mathfrak{f}_4{}^C$ の Killing 形式 B_4 は $B_4(\delta_1,\delta_2)=3\,\mathrm{tr}(\delta_1\delta_2)$ であった（定理2.36）から，$H=\sum_{k=0}^{3}\lambda_kH_k$，$H'=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k'H_k$ $\in\mathfrak{h}$ に対し

$$B_4(H, H') = 3(6\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k')$$

となる．実際，

$$HE_i = 0,\quad i = 1, 2, 3,$$
$$HF_1(x) = F_1(Hx),\quad HF_2(x) = F_2((\nu H)x),\quad HF_3(x) = F_3((\varkappa\pi H)x)$$

であるから

$$\begin{aligned}B_4(H, H') &= \sum_{k,l=0}^{3}\lambda_k\lambda_l' B_4(H_k, H_l)\\ &= 3\sum_{k,l}\lambda_k\lambda_l'(\mathrm{tr}(H_kH_l) + \mathrm{tr}((\nu H_k)(\nu H_l)) + \mathrm{tr}((\varkappa\pi H_k)(\varkappa\pi H_l)))\\ &= 3\sum_{k,l}\lambda_k\lambda_l'(2+2+2)\delta_{kl} = 3(6\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k')\end{aligned}$$

となる．これより root $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ に対応する元 $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, H_{\alpha_3}, H_{\alpha_4} \in \mathfrak{h}$ ($B_4(H_\alpha, H) = \alpha(H), H \in \mathfrak{h}$) は

$$H_{\alpha_1} = \frac{1}{18}(H_0 - H_1), \qquad H_{\alpha_2} = \frac{1}{18}(H_1 - H_2),$$
$$H_{\alpha_3} = \frac{1}{18}H_2, \qquad H_{\alpha_4} = \frac{1}{36}(-H_0 - H_1 - H_2 + H_3)$$

となる．よって

$$(\alpha_1, \alpha_1) = B_4(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_1}) = 18\frac{1}{18}\frac{1}{18}(1+1) = \frac{1}{9}$$

となる．同様にして

$$(\alpha_2, \alpha_2) = \frac{1}{9},\ (\alpha_3, \alpha_3) = (\alpha_4, \alpha_4) = \frac{1}{18},$$
$$(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{18},\ (\alpha_2, \alpha_3) = -\frac{1}{18},\ (\alpha_3, \alpha_4) = -\frac{1}{36},$$
$$(\alpha_1, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_4) = (\alpha_2, \alpha_4) = 0$$

となる．これより容易に Dynkin 図形を描くことができる．

12　単連結複素 Lie 群 $F_4{}^C$

定義　複素 Jordan 代数 $\mathfrak{J}^C$ の自己同型群を $F_4{}^C$ で表す：

$$\begin{aligned}F_4{}^C &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y\}\\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det \alpha X = \det X, (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y)\}\\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det \alpha X = \det X, \alpha E = E\}\\ &= \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y\}.\end{aligned}$$

$\mathfrak{J}^C$ に **Hermite** 内積 $\langle X, Y\rangle$ を

$$\langle X, Y\rangle=(\tau X, Y)$$

で定義する．$\alpha\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)$ のこの内積に関する共役転置写像を α^* で表わす：$\langle\alpha^* X, Y\rangle=\langle X, \alpha Y\rangle$，$X, Y\in\mathfrak{J}^C$．

補題2.40　(1)　$\alpha\in F_4{}^C$ ならば $\alpha^*=\tau\alpha^{-1}\tau\in F_4{}^C$ である．

(2)　$\alpha\in F_4$ に対し，その複素化写像 $\alpha^C:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ は $\alpha^C\in F_4{}^C$ であるから，α と α^C を同一視して F_4 を $F_4{}^C$ の部分群とみなす：$F_4\subset F_4{}^C$　さて，$\alpha\in F_4{}^C$ が $\alpha\in F_4$ になるための必要十分条件は $\tau\alpha=\alpha\tau$ である：

$$F_4=\{\,\alpha\in F_4{}^C\,|\,\tau\alpha=\alpha\tau\,\}.$$

証明　(1)　$\langle\alpha^* X, Y\rangle=\langle X, \alpha Y\rangle=(\tau X, \alpha Y)=(\alpha^{-1}\tau X, Y)=\langle\tau\alpha^{-1}\tau X, Y\rangle$，$X, Y\in\mathfrak{J}^C$ より $\alpha^*=\tau\alpha^{-1}\tau\in F_4{}^C$ である．

(2)　$\alpha\in F_4{}^C$ が $\tau\alpha=\alpha\tau$ ならば，$X\in\mathfrak{J}$ に対し $\tau\alpha X=\alpha\tau X=\alpha X$ より $\alpha X\in\mathfrak{J}$ となるので，α は $\mathfrak{J}$ の $\boldsymbol{R}$-同型写像 α' を誘導し，$\alpha'\in F_4$ である．そして $\alpha=(\alpha')^C$ となっている．

定理2.41　Lie 群 $F_4{}^C$ の極分解は

$$F_4{}^C\simeq F_4\times\boldsymbol{R}^{52}$$

で与えられる．したがって，$F_4{}^C$ は単連結な F_4 型複素 Lie 群である．

証明　$F_4{}^C$ は $\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)=GL(27, C)$ の代数部分群であり，$\alpha\in F_4{}^C$ ならば $\alpha^*\in F_4{}^C$ である（補題2.40）．よって Chevalley の補題（[3]定理6.3）より

$$F_4{}^C\simeq(F_4{}^C\cap U(\mathfrak{J}^C))\times\boldsymbol{R}^d=F_4\times\boldsymbol{R}^d\ \text{（補題2.40）},$$

$d=\dim F_4{}^C-\dim F_4=2\times52-52=52$ となる．F_4 は単連結である（定理2.22）から，$F_4{}^C$ も単連結である．$F_4{}^C$ の Lie 環は $\mathfrak{f}_4{}^C$ であるから，結局，$F_4{}^C$ は単連結 F_4 型複素 Lie 群であることが分かった．

付録13　F_4 の位数 3 の自己同型写像 w と部分群 $(SU(3)\times SU(3))/Z_3$

$w\in G_2$ (G_2, **5**) を $w\in G_2\subset F_4$ とみなし，F_4 の部分群

$$(F_4)^w=\{\,\alpha\in F_4\,|\,w\alpha=\alpha w\,\}$$

を調べよう．

$\mathfrak{J}$ の元 $\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$, $x_i = a_i + \boldsymbol{m}_i \in \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}^3$ を $\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}) \oplus M(3, \boldsymbol{C})$ の元 $\begin{pmatrix} \xi_1 & a_3 & \overline{a}_2 \\ \overline{a}_3 & \xi_2 & a_1 \\ a_2 & \overline{a}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 \end{pmatrix}$ に対応させて，$\mathfrak{J}$ と $\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}) \oplus M(3, \boldsymbol{C})$ を同一視する：$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}) \oplus M(3, \boldsymbol{C})$.

$M = (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3)$, $N = (\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) \in M(3, \boldsymbol{C})$ に対し，外積 $M \times N \in M(3, \boldsymbol{C})$ を

$$M \times N = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{n}_3 & \boldsymbol{m}_3 \times \boldsymbol{n}_1 & \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \\ + & + & + \\ \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{m}_3 & \boldsymbol{n}_3 \times \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{m}_3 \end{pmatrix}$$

で定義する．さて，$\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}) \oplus M(3, \boldsymbol{C})$ に Freudenthal 積と $\boldsymbol{R}$-線型写像 w を

$$(A+M) \times (B+N) = \left(A \times B - \frac{1}{2}(M^*N + N^*M)\right) - \frac{1}{2}(MB + NA + \overline{M \times N})$$

$$w(A+M) = A + \omega M$$

で定義すると，これらは $\mathfrak{J}$ のそれらと対応している．

定理2.42 $(F_4)^w \cong (SU(3) \times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_3 = \{(E, E), (\omega E, \omega E), (\omega^2 E, \omega^2 E)\}$, $1 \neq \omega \in \boldsymbol{C}$, $\omega^3 = 1$.

証明 写像 $\varphi : SU(3) \times SU(3) \to (F_4)^w$ を

$$\varphi(P, Q)(A+M) = QAQ^* + PMQ^*, \quad A+M \in \mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C}) \oplus M(3, \boldsymbol{C}) = \mathfrak{J}$$

で定義すると，φ は全射群準同型写像であって，$\mathrm{Ker}\,\varphi = \boldsymbol{Z}_3$ である．よって定理を得る．

付録14 非 compact F_4 型例外 Lie 群 $F_{4(4)}$, $F_{4(-20)}$

$$\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}') = \{X \in M(3, \mathfrak{C}') \mid X^* = X\},$$
$$\mathfrak{J}(1, 2, \mathfrak{C}) = \{X \in M(3, \mathfrak{C}) \mid I_1 X^* I_1 = X\}$$

ここに $I_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．$\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}')$, $\mathfrak{J}(1, 2, \mathfrak{C})$ に Jordan 積 $X \circ Y$ を

$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ で定義する．このとき同型

$$\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}') \cong \{ X \in \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})^C \mid \tau\gamma X = X \} = (\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})^C)_{\tau\gamma}$$
$$\mathfrak{J}(1, 2, \mathfrak{C}) \cong \{ X \in \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})^C \mid \tau\sigma X = X \} = (\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})^C)_{\tau\sigma}$$

を得るので同一視する．さて，Jordan 代数 $\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}')$，$\mathfrak{J}(1, 2, \mathfrak{C})$ の自己同型群をそれぞれ $F_{4(4)}$，$F_{4(-20)}$ で表す：

$$F_{4(4)} = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}')) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \},$$
$$F_{4(-20)} = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}(1, 2, \mathfrak{C})) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \}.$$

これらの群は

$$F_{4(4)} = (F_4{}^C)^{\tau\gamma}, \quad F_{4(-20)} = (F_4{}^C)^{\tau\sigma}$$

で定義してもよい．

定理2.43　Lie 群 $F_{4(4)}$，$F_{4(-20)}$ の極分解はそれぞれ

$$F_{4(4)} \simeq (Sp(1) \times Sp(3))/\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{R}^{28},$$
$$F_{4(-20)} \simeq Spin(9) \times \boldsymbol{R}^{16}$$

で与えられる．

証明　それぞれ定理2.27，定理2.23に対応する事実である．

定理2.44　中心 $z(F_{4(4)})$，$z(F_{4(-20)})$ は 1 のみからなる．

III. 例外型単純 Lie 群 E_6

1　compact 例外群 E_6 とその Lie 環 $\mathfrak{e}_6$

定義　群 $E_6{}^C$, E_6 をそれぞれ

$$E_6{}^C=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\det\alpha X=\det X\},$$
$$\begin{aligned}E_6&=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\det\alpha X=\det X, \langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X, Y\rangle\}\\&=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,(\alpha X,\alpha Y,\alpha Z)=(X, Y, Z), \langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X, Y\rangle\}\\&=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\alpha X\times\alpha Y={}^t\alpha^{-1}(X\times Y), \langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X, Y\rangle\}\\&=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\alpha X\times\alpha Y=\tau\alpha\tau(X\times Y), \langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X, Y\rangle\}\end{aligned}$$

で定義する．$E_6{}^C$ の対合自己同型写像 λ を

$$\lambda(\alpha)={}^t\alpha^{-1}$$

で定義する（補題2.4）とき，E_6 の定義を

$$E_6=\{\alpha\in E_6{}^C\,|\,\tau\lambda(\alpha)\tau=\alpha\}=(E_6{}^C)^{\tau\lambda}$$

としてもよい．

定理3.1　E_6 は compact Lie 群である．

証明　E_6 はユニタリ群 $U(27)=U(\mathfrak{J}^C)=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X, Y\rangle\}$ の閉部分群として compact Lie 群である．

以下，次の記号

$$\mathfrak{J}_0=\{X\in\mathfrak{J}\,|\,\mathrm{tr}(X)=0\},\quad \mathfrak{J}_0{}^C=\{X\in\mathfrak{J}^C\,|\,\mathrm{tr}(X)=0\}$$

を用いる．

定理3.2　(1)　Lie 群 $E_6{}^C$ の Lie 環 $\mathfrak{e}_6{}^C$ は

$$\mathfrak{e}_6{}^C=\{\phi\in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,(\phi X, X, X)=0\}$$

である．

(2) $\mathfrak{e}_6{}^C$ の元 ϕ は

$$\phi=\delta+\tilde{T}, \qquad \delta\in\mathfrak{f}_4{}^C,\ T\in\mathfrak{J}_0{}^C$$

と一意に表される.

証明 (1) は容易である (命題2.11).

(2) $T=\phi E$ とおくと, $T\in\mathfrak{J}^C$, $\mathrm{tr}(T)=0$ である. 実際, $\mathrm{tr}(T)=(T, E, E)=(\phi E, E, E)=0$ である. $\delta=\phi-\tilde{T}$ とおくと, $\delta\in\mathfrak{e}_6{}^C$ で, かつ $\delta E=\phi E-\tilde{T}E=T-T=0$ となるから $\delta\in\mathfrak{f}_4{}^C$ である (定理2.12). よって $\phi=\delta+\tilde{T}$, $\delta\in\mathfrak{f}_4{}^C$, $T\in\mathfrak{J}_0{}^C$ と表された. 次に表示の一意性を示そう. $\delta+\tilde{T}=0$, $\delta\in\mathfrak{f}_4{}^C$, $T\in\mathfrak{J}_0{}^C$ とする. これを E に施して, $T=0$ を得て, さらに $\delta=0$ を得る.

補題3.3 $\phi=\delta+\tilde{T}\in\mathfrak{e}_6{}^C$ $(\delta\in\mathfrak{f}_4{}^C, T\in\mathfrak{J}_0{}^C)$ に対し $\lambda(\phi)=-{}^t\phi=\delta-\tilde{T}$ となる. 特に $\lambda(\phi)\in\mathfrak{e}_6{}^C$ である.

証明 $(-{}^t\phi X, Y)=-(X, \phi Y)=-(X, \delta Y+\tilde{T}Y)=-(X, \delta Y)-(X, T\circ Y)=(\delta X, Y)-(\tilde{T}X, Y)=((\delta-\tilde{T})X, Y)$, $X, Y\in\mathfrak{J}^C$ より $-{}^t\phi=\delta-\tilde{T}\in\mathfrak{e}_6{}^C$ である.

定理3.4 (1) Lie 群 E_6 の Lie 環 $\mathfrak{e}_6$ は

$$\mathfrak{e}_6=\{\phi\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,(\phi X, X, X)=0, \langle\phi X, Y\rangle+\langle X, \phi Y\rangle=0\}$$

である.

(2) $\mathfrak{e}_6$ の元 ϕ は

$$\phi=\delta+i\tilde{T}, \qquad \delta\in\mathfrak{f}_4,\ T\in\mathfrak{J}_0$$

と一意に表される. 特に, $\mathfrak{e}_6$ の次元は

$$\dim\mathfrak{e}_6=52+26=78$$

である.

証明 (1) は容易である. (2) $\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$ が $\phi\in\mathfrak{e}_6$ であるための必要十分条件は $\tau\lambda(\phi)\tau=\phi$ である. さて $\phi=\delta+\tilde{T}_1$, $\delta\in\mathfrak{f}_4{}^C$, $T_1\in\mathfrak{J}_0{}^C$ と表す (定理3.2) とき, $\tau\lambda(\phi)\tau=\tau\delta\tau-\widetilde{\tau T_1}$ となる (補題3.3). $\tau\lambda(\phi)\tau=\phi$ の条件は $\tau\delta\tau=\delta$, $\tau T_1=-T_1$ であるから, 定理を得る.

2　E_6 の対合自己同型写像 λ と部分群 F_4

$E_6{}^C$ の自己同型写像 λ は E_6 の対合自己同型写像

$$\lambda(\alpha)={}^t\alpha^{-1}, \qquad \alpha\in E_6$$

を誘導している．さて，E_6 の部分群

$$\begin{aligned}(E_6)^\lambda &= \{\alpha\in E_6 \mid \lambda(\alpha)=\alpha\}\\ &= \{\alpha\in E_6 \mid \tau\alpha=\alpha\tau\}=(E_6)^\tau\\ &= \{\alpha\in E_6 \mid (\alpha X, \alpha Y)=(X, Y), X, Y\in\mathfrak{J}^C\}\\ &= \{\alpha\in E_6 \mid \alpha E=E\}\end{aligned}$$

(定理2.5) を調べよう．

定理3.5　$(E_6)^\lambda\cong F_4.$

証明　$\alpha\in(E_6)^\lambda=(E_6)^\tau$ とする．$X\in\mathfrak{J}$ に対し，$\tau\alpha X=\alpha\tau X=\alpha X$ より $\alpha X\in\mathfrak{J}$ となるので，α は $\mathfrak{J}$ の $\boldsymbol{R}$-同型写像を誘導し，α の $\mathfrak{J}$ への制限写像 $\alpha'=\alpha|\mathfrak{J}$ は

$$\begin{aligned}F_4 &= \{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid \det \alpha X=\det X, (\alpha X, \alpha Y)=(X, Y)\}\\ &= \{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}) \mid \alpha(X\circ Y)=\alpha X\circ\alpha Y\}\end{aligned}$$

(定理2.5) に属する．逆に，$\alpha\in F_4$ に対し，その複素化写像 $\alpha^C:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ は $\alpha^C\in(E_6)^\tau$ である．よって対応 $\alpha\in F_4\to\alpha^C\in(E_6)^\tau$ は Lie 群の同型を与えている．

3　E_6 の連結性

E_6 の単位元 1 を含む連結成分を $(E_6)_0$ で表す．$(E_6)_0=E_6$ を示そう．

補題3.6　(1)　$t\in\boldsymbol{R}$ に対し，写像 $\alpha_{12}(t):\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ を

$$\alpha_{12}(t)\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{it}\xi_1 & x_3 & e^{it/2}\overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & e^{-it}\xi_2 & e^{-it/2}x_1\\ e^{it/2}x_2 & e^{-it/2}\overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}$$

で定義すると $\alpha_{12}(t)\in(E_6)_0$ である．同様に $\alpha_{13}(t)$, $\alpha_{23}(t)\in(E_6)_0$ を定義することができる．

(2)　$a\in\mathfrak{C}$ に対し，写像 $\alpha_1(a):\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$，$\alpha_1(a)X(\xi, x)=Y(\eta, y)$ を

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 \\ \eta_2 = \quad \dfrac{\xi_2-\xi_3}{2} + \dfrac{\xi_2+\xi_3}{2}\cos|a| + i\dfrac{(a, x_1)}{|a|}\sin|a| \\ \eta_3 = -\dfrac{\xi_2-\xi_3}{2} + \dfrac{\xi_2+\xi_3}{2}\cos|a| + i\dfrac{(a, x_1)}{|a|}\sin|a|, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x_1 + \dfrac{(\xi_1+\xi_2)a}{2|a|}\sin|a| - \dfrac{2(a, x_1)a}{|a|^2}\sin^2\dfrac{|a|}{2} \\ y_2 = x_2\cos\dfrac{|a|}{2} + i\dfrac{\overline{x_3 a}}{|a|}\sin\dfrac{|a|}{2} \\ y_3 = x_3\cos\dfrac{|a|}{2} + i\dfrac{\overline{a x_2}}{|a|}\sin\dfrac{|a|}{2} \end{cases}$$

($a=0$ のときには $\dfrac{\sin|a|}{|a|}=1$ とする) で定義すると，$\alpha_1(a)\in(E_6)_0$ である．

証明 (1) $E_1-E_2\in\mathfrak{J}_0$ に対して $i(E_1-E_2)^\sim\in\mathfrak{e}_6$ であり (定理3.4)，かつ $\alpha_{12}(t)=\exp it(E_1-E_2)^\sim$ である (計算略)．よって $\alpha_{12}(t)\in(E_6)_0$ である．($\alpha_{12}(t)\in(E_6)_0$ は直接的にも明らかである)．

(2) $F_1(a)\in\mathfrak{J}_0$ に対して $i\widetilde{F}_1(a)\in\mathfrak{e}_6$ であり (定理3.4)，かつ $\alpha_1(a)=\exp i\widetilde{F}_1(a)$である (計算略)．よって $\alpha_1(a)\in(E_6)_0$ である．

命題3.7 任意の $X\in\mathfrak{J}^C$ は，ある $\alpha\in(E_6)_0$ により対角線形の行列に変形される：

$$\alpha X = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \xi_i\in C.$$

さらに，ξ_1，ξ_2，ξ_3 のうち 2 つは負でない実数になるように $\alpha\in(E_6)_0$ を選ぶことができる．

証明 $X\in\mathfrak{J}^C$ を固定して，$\mathfrak{X}=\{\alpha X\,|\,\alpha\in(E_6)_0\}$ とおく．$(E_6)_0$ は compact である (定理3.1) から，$\mathfrak{X}$ も compact である．($\xi\in C$ に対しても $\sqrt{(\tau\xi)\xi}$ を $|\xi|$ で表すことにする)．$Y=Y(\eta, y)$ が $\mathfrak{X}$ を動くときの $|\eta_1|^2+|\eta_2|^2+|\eta_3|^2$ の最大値 $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+|\xi_3|^2$ を考える．($\mathfrak{X}$ は compact であるからこの最大値は存在する)．この最大値を $X_0=X(\xi, x)\in\mathfrak{X}$ で取るとすると，X_0 は対角線形である．実際，X_0 が対角線形でないとし，例えば X_0 の $(2, 3)$-成分 x_1 が 0 でないとしよう：

$$0 \neq x_1 = p + iq, \quad p, q \in \mathfrak{C}.$$

ξ_2, ξ_3 が負でない実数であるとしておいてよい．(必要あれば，X_0 に適当な $\alpha_{12}(t_1), \alpha_{13}(t_2), t_i \in \boldsymbol{R}$ (補題3.6) を施せばよい)．

(1) $q \neq 0$ とする．$a(t) = \dfrac{q}{|q|}t$, $t > 0$ に対して補題3.6の $\alpha_1(a(t)) \in (E_6)_0$ をつくると，$Y(\eta(t), y(t)) = \alpha_1(a(t))X_0 \in \mathfrak{X}$ に対し $\left(\nu = \left(\dfrac{q}{|q|}, p\right)\right.$ とおいた$\left.\right)$

$$\begin{aligned}
&|\eta_1(t)|^2 + |\eta_2(t)|^2 + |\eta_3(t)|^2 \\
&= |\xi_1|^2 + \left|\frac{\xi_2 - \xi_3}{2} + \frac{\xi_2 + \xi_3}{2}\cos t - |q|\sin t + i\nu \sin t\right|^2 \\
&\qquad + \left|-\frac{\xi_2 - \xi_3}{2} + \frac{\xi_2 + \xi_3}{2}\cos t - |q|\sin t + i\nu \sin t\right|^2 \\
&= |\xi_1|^2 + 2\left(\frac{\xi_2 - \xi_3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\xi_2 + \xi_3}{2}\cos t - |q|\sin t\right)^2 + 2\nu^2 \sin^2 t \\
&= |\xi_1|^2 + 2\left(\frac{\xi_2 - \xi_3}{2}\right)^2 + 2\left(\left(\frac{\xi_2 + \xi_3}{2}\right)^2 + |q|^2\right)\sin^2(t + t_0) + 2\nu^2 \sin^2 t
\end{aligned}$$

(ある $t_0 \in \boldsymbol{R}$ に対して)

$$\leqq |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + 2|q|^2 + 2\nu^2 \sin^2 t_0$$

この値は最大値であり，ある $t > 0$ で確かにこの値を取っているので，$|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2$ が最大値であるという仮定に反する．よって $q = 0$ である．

(2) $p \neq 0$ とする．$a(t) = \dfrac{p}{|p|}t$, $t > 0$ とおいて補題2.19の $\beta_1(t) \in F_4 \subset (E_6)_0$ をつくり，$\beta_1(a(t))X_0 = Y(\eta(t), y(t)) \in \mathfrak{X}$ に対して $|\eta_1(t)|^2 + |\eta_2(t)|^2 + |\eta_3(t)|^2$ の最大値を求めると，命題2.20と同じ計算により $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + 2|p|^2$ となり $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2$ が最大値であるという仮定に反する．よって $p = 0$ である．以上で $x_1 = 0$ が示された．$x_2 = x_3 = 0$ の証明も，補題3.6と同様な $\alpha_2(a)$, $\alpha_3(a) \in (E_6)_0$ をつくって証明すればよい．以上で X_0 が対角線形であることが示された．

***E*IV 型対称空間**とよばれる空間 $E\mathrm{IV}$ を

$$E\mathrm{IV} = \{X \in \mathfrak{J}^C \mid \det X = 1, \langle X, X \rangle = 3\}$$

で定義する．

定理3.8 $\quad E_6/F_4 \simeq E\mathrm{IV}.$

特に E_6 は連結である．

証明　$\alpha\in E_6$, $X\in E\mathrm{IV}$ ならば $\alpha X\in E\mathrm{IV}$ であるから，E_6 は $E\mathrm{IV}$ に働く．$(E_6)_0$ が $E\mathrm{IV}$ に推移的に働くことを示そう．そのためには，任意の $X\in E\mathrm{IV}$ がある $\alpha\in(E_6)_0$ により $\alpha X=E\in E\mathrm{IV}$ となることを示せばよい．さて，$X\in E\mathrm{IV}$ を $\alpha\in(E_6)_0$ により

$$\alpha X=\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & \xi_3\end{pmatrix},\quad \xi_1\in C,\quad \xi_2\geqq 0,\quad \xi_3\geqq 0$$

と変形する（命題3.7）．条件 $X\in E\mathrm{IV}$，すなわち

$$\begin{cases}\xi_1\xi_2\xi_3=\det\,\alpha X=\det\,X=1, & (\text{したがって }\xi_i>0,\ \ i=1,2,3)\\ \xi_1{}^2+\xi_2{}^2+\xi_3{}^2=\langle\alpha X,\alpha X\rangle=\langle X,X\rangle=3\end{cases}$$

より $\xi_1=\xi_2=\xi_3=1$ となる．実際，$0\leqq(\xi_2-\xi_3)^2=\xi_2{}^2+\xi_3{}^2-2\xi_2\xi_3=3-\xi_1{}^2-\dfrac{2}{\xi_1}$ $=-\dfrac{\xi_1{}^3-3\xi_1+2}{\xi_1}=-\dfrac{(\xi_1-1)^2(\xi_1+2)}{\xi_1}\leqq 0$ より $\xi_1=1$ を得る．同様に $\xi_2=\xi_3=1$ である．よって $\alpha X=E$ となり，$(E_6)_0$ の推移性が示された．これより $E\mathrm{IV}=(E_6)_0E$ となるので，$E\mathrm{IV}$ は連結である．さて，E_6 は $E\mathrm{IV}$ に推移的に働き，$E\in E\mathrm{IV}$ における E_6 の等方群は F_4 である（定理3.5）から，同相 $E_6/F_4\simeq E\mathrm{IV}$ を得る．$E\mathrm{IV}$ と F_4 が連結であるから，E_6 も連結である．

4　E_6 の中心 $z(E_6)$

定理3.9　群 E_6 の中心 $z(E_6)$ は位数 3 の巡回群である：

$$z(E_6)=\{1,\omega 1,\omega^2 1\},\qquad 1\neq\omega\in C,\ \ \omega^3=1.$$

証明　$\alpha\in z(E_6)$ とする．$\beta\in F_4\subset E_6$ に対して $\beta\alpha E=\alpha\beta E=\alpha E$ であるから，$\alpha E=P=P(\rho,p)$ とおくと

$$\text{すべての }\beta\in F_4\quad\text{に対して}\quad \beta P=P$$

となる．$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ に対し $\beta:\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$，$\beta X=TXT^{-1}$ として $\beta\in F_4$ をつくると，$\beta P=P$ より $p_1=p_2=p_3=0$，$\rho_1=\rho_2=\rho_3$（$=\omega$ とおく）を得る．よって

$$\alpha E=P=\omega E,\quad \omega\in C$$

となる．$\omega^3=\det(\omega E)=\det\,\alpha E=\det\,E=1$ である．$\omega 1\in z(E_6)$ であるから $\omega^{-1}\alpha\in z(E_6)$ であり，さらに $\omega^{-1}\alpha E=E$ より $\omega^{-1}\alpha\in z(F_4)$ である．$z(F_4)=\{1\}$

である（定理2.24）から $\omega^{-1}\alpha=1$ すなわち $\alpha=\omega 1$ を得る．以上で定理が証明された．

compact 単純 Lie 群の一般論によれば，単連結 compact E_6 型 Lie 群の中心は位数 3 の巡回群であることが知られている．後で（定理3.40）Lie 環 $\mathfrak{e}_6$ が E_6 型であることを示すので，この Lie 群 E_6 は単連結でなければならない．よって次の定理を得る．

定理3.10　E_6 は単連結 compact Lie 群で，その次元は78である．

5　E_6 の対合自己同型写像 σ と部分群 $(U(1)\times Spin(10))/Z_4$

$\sigma\in F_4$ の複素化写像 $\sigma:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ を考える．$\sigma\in F_4\subset E_6$ であり，$\sigma^2=1$ である．E_6 の部分群

$$(E_6)^\sigma=\{\alpha\in E_6\,|\,\sigma\alpha=\alpha\sigma\}$$

を調べよう．そのために，$\mathfrak{J}^C$ の σ 固有空間

$$\begin{aligned}(\mathfrak{J}^C)_\sigma&=\{X\in\mathfrak{J}^C\,|\,\sigma X=X\}\\&=\{X\in\mathfrak{J}^C\,|\,4E_1\times(E_1\times X)=X\}\oplus\mathfrak{C}_1{}^C,\\(\mathfrak{J}^C)_{-\sigma}&=\{X\in\mathfrak{J}^C\,|\,\sigma X=-X\}\\&=\{X\in\mathfrak{J}^C\,|\,E_1\times X=0,\langle E_1,X\rangle=0\}\end{aligned}$$

$(\mathfrak{C}_1{}^C=\{\xi E_1\,|\,\xi\in C\})$ を考える．$\mathfrak{J}^C=(\mathfrak{J}^C)_\sigma\oplus(\mathfrak{J}^C)_{-\sigma}$ であり，$(\mathfrak{J}^C)_\sigma$，$(\mathfrak{J}^C)_{-\sigma}$ は $(E_6)^\sigma$ の作用で不変である．

補題3.11　$\alpha\in(E_6)^\sigma$ ならば，ある $\xi\in C$ が存在し

$$\alpha E_1=\xi E_1,\qquad(\tau\xi)\xi=1$$

となる．

証明　$\alpha\in(E_6)^\sigma$ とする．まず

$$\alpha E_2,\alpha E_3\in\mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})^C\qquad(\text{定理2.23参照})$$

を示そう．実際，$\alpha E_2=\alpha(-F_2(1)\times F_2(1))=-\tau\alpha\tau F_2(1)\times\tau\alpha\tau F_2(1)=-(F_2(x_2)+F_3(x_3))\times(F_2(x_2)+F_3(x_3))$ $(x_2,x_3\in\mathfrak{C}^C)$ $=(x_2,x_2)E_2+(x_3,x_3)E_3-F_1(\overline{x_2x_3})\in\mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})^C$ となる．同様に $\alpha E_3\in\mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})^C$ である．次に

$$\alpha E_1\in\mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})^C$$

を示そう．実際，$\alpha E_1 \in \mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})^C$ とすると，$\alpha E=\alpha E_1+\alpha E_2+\alpha E_3 \in \mathfrak{J}(2,\mathfrak{C})^C$ となるから，$\alpha E=\xi_2 E_2+\xi_3 E_3+F_1(x)$，$\xi_i \in C$，$x \in \mathfrak{C}^C$ とおくことができる．$\alpha E \times \alpha E=\tau\alpha\tau(E\times E)=\tau\alpha E$ より $(\xi_2\xi_3-(x,x))E_1=\tau\xi_2 E_2+\tau\xi_3 E_3+F_1(\tau x)$ となり，$\xi_2=\xi_3=0$，$x=0$ を得る．すなわち $\alpha E=0$ となり矛盾する．よって

$$\alpha E_1=\xi E_1+\xi_2 E_2+\xi_3 E_3+F_1(x), \qquad \xi \neq 0$$

とおくことができる．$\alpha E_1 \times \alpha E_1=\tau\alpha\tau(E_1\times E_1)=0$ より $(\xi_2\xi_3-(x,x))E_1+\xi\xi_3 E_2+\xi\xi_2 E_3-\xi F_1(x)=0$ となり，$\xi_2=\xi_3=0$，$x=0$ を得る．よって

$$\alpha E_1=\xi E_1, \qquad \xi \neq 0$$

となる．最後に，$1=\langle E_1, E_1\rangle=\langle \alpha E_1, \alpha E_1\rangle=\langle \xi E_1, \xi E_1\rangle=(\tau\xi)\xi\langle E_1, E_1\rangle=(\tau\xi)\xi$ である．

$(E_6)^\sigma$ を調べるために，E_6 の部分群

$$(E_6)_{E_1}=\{\alpha \in E_6 \mid \alpha E_1=E_1\}$$

を考察する．

補題3.12 $(E_6)_{E_1}$ は $(E_6)^\sigma$ の部分群である：$(E_6)_{E_1} \subset (E_6)^\sigma$．

証明 $(\mathfrak{J}^C)_\sigma=\{X \in \mathfrak{J}^C \mid 4E_1\times(E_1\times X)=0\} \oplus \mathfrak{C}_1{}^C$，$(\mathfrak{J}^C)_{-\sigma}=\{X \in \mathfrak{J}^C \mid E_1 \times X=0, \langle E_1, X\rangle=0\}$ より，これらは $\alpha \in (E_6)_{E_1}$ の作用で不変であることが分かる．このことから $\sigma\alpha=\alpha\sigma$ が導かれる（定理2.23と同じ）．よって $\alpha \in (E_6)^\sigma$ である．

命題3.13 $$(E_6)_{E_1}/Spin(9) \simeq S^9.$$
特に $(E_6)_{E_1}$ は単連結である．

証明 10次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^{10} を

$$V^{10}=\{X \in \mathfrak{J}^C \mid 2E_1 \times X=-\tau X\}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\tau\xi \end{pmatrix} \middle| \xi \in C, x \in \mathfrak{C}\right\}$$

で定義する．$S^9=\{X \in V^{10} \mid \langle X, X\rangle=2\}$ とおくと，S^9 は 9 次元球面である．$\alpha \in (E_6)_{E_1}$，$X \in S^9$ ならば $\alpha X \in S^9$ である．実際，$2E_1 \times \alpha X=2\alpha E_1 \times \alpha X=\tau\alpha\tau(2E_1 \times X)=\tau\alpha\tau(-\tau X)=-\tau\alpha X$，$\langle \alpha X, \alpha X\rangle=\langle X, X\rangle=2$ である．よって

$(E_6)_{E_1}$ は S^9 に働く．この働き方は推移的であることを示そう．そのためには，任意の $X\in S^9$ がある $\alpha\in(E_6)_{E_1}$ により $\alpha X=i(E_2+E_3)\in S^9$ となることを示せばよい．さて，$X\in S^9$ を補題3.6のある $\alpha_{23}(t)\in(E_6)_{E_1}$ により

$$\alpha_{23}(t)X\in S^8=\{X\in\mathfrak{J}_{01}\,|\,\langle X, X\rangle=2\}$$

とする．$Spin(9)$ は S^8 に推移的に働く（命題2.9）から，ある $\beta\in Spin(9)=(F_4)_{E_1}\subset(E_6)_{E_1}$ により

$$\beta\alpha_{23}(t)X=E_2-E_3\in S^8$$

にできる．さらに補題3.6の $\alpha_{23}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\in(E_6)_{E_1}$ を施すと

$$\alpha_{23}\left(\frac{\pi}{2}\right)\beta\alpha_{23}(t)X=i(E_2+E_3)$$

となる．よって推移的である．$i(E_2+E_3)\in S^9$ における $(E_6)_{E_1}$ の等方群は $Spin(9)$ である．実際，$\alpha\in(E_6)_{E_1}$ が $\alpha(i(E_2+E_3))=i(E_2+E_3)$ を満たすとすると，$\alpha E=\alpha E_1+\alpha(E_2+E_3)=E_1+(E_2+E_3)=E$ より $\alpha\in F_4$ となる．よって $\alpha\in(F_4)_{E_1}=Spin(9)$ となる．逆に $\alpha\in Spin(9)$ ならば $\alpha(i(E_2+E_3))=i(E_2+E_3)$ である．よって同相 $(E_6)_{E_1}/Spin(9)\simeq S^9$ を得る．

定理3.14　$$(E_6)_{E_1}\cong Spin(10).$$

証明　定理2.10と同様にして，群準同型写像

$$p:(E_6)_{E_1}\to SO(10)=SO(V^{10}),\quad p(\alpha)=\alpha\,|\,V^{10}$$

が定義できる．p が全射であることも，$p:(E_6)_{E_1}\to SO(10)$ の $(F_4)_{E_1}$ への制限が定理2.10の $p':Spin(9)\to SO(9)$ と一致する（特に p' が全射である）ことと，可換図形

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & Spin(9) & \longrightarrow & (E_6)_{E_1} & \longrightarrow & S^9 & \longrightarrow & * \\
 & & \downarrow p' & & \downarrow p & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & SO(9) & \longrightarrow & SO(10) & \longrightarrow & S^9 & \longrightarrow & *
\end{array}$$

より分かる．$\mathrm{Ker}\,p=\{1,\sigma\}$ である．実際，$\alpha\in\mathrm{Ker}\,p$ は E_2-E_3，$i(E_2+E_3)$ を不変にするから，$\alpha E_i=E_i$，$i=1,2,3$ となり，$\alpha\in Spin(8)$ である．よって定理2.10より $\mathrm{Ker}\,p=\{1,\sigma\}=Z_2$ となる．よって群同型

$$(E_6)_{E_1}/Z_2\cong SO(10)$$

を得る．これより $(E_6)_{E_1}$ は $SO(10)$の連結な（命題3.13）被覆群として

$Spin(10)$ に同型である.

定理3.15 $0 \neq \theta \in C$ に対して, C-線型写像 $\phi(\theta): \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ を

$$\phi(\theta)\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^4\xi_1 & \theta x_3 & \theta\overline{x}_2 \\ \theta\overline{x}_3 & \theta^{-2}\xi_2 & \theta^{-2}x_1 \\ \theta x_2 & \theta^{-2}\overline{x}_1 & \theta^{-2}\xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義する. さて, $(E_6)^\sigma$ は部分群

$$U(1) = \{\phi(\theta) \mid \theta \in C, (\tau\theta)\theta = 1\}$$

を含んでいる. この群はユニタリ群 $U(1) = \{\theta \in C \mid (\tau\theta)\theta = 1\}$ に同型である.

補題3.16 $(E_6)^\sigma$ の部分群 $U(1)$ と $Spin(10)$ は, 各元毎に可換である.

証明 $\mathfrak{J}^C = \mathfrak{E}_1{}^C \oplus \mathfrak{J}(2, \mathfrak{C})^C \oplus (\mathfrak{J}^C)_{-\sigma}$ の分解を考える. $\phi(\theta) \in U(1)$ の各空間への制限写像は

$$\phi(\theta) \mid \mathfrak{E}_1{}^C = \theta^4 1, \quad \phi(\theta) \mid \mathfrak{J}(2, \mathfrak{C})^C = \theta^{-2} 1, \quad \phi(\theta) \mid (\mathfrak{J}^C)_{-\sigma} = \theta 1$$

の定値写像である. 一方, $\beta \in Spin(10)$ もこれらの空間の C-線型写像を誘導している. このことから $\phi(\theta)$ と β が可換である: $\phi(\theta)\beta = \beta\phi(\theta)$ ことが分かる.

定理3.17 $(E_6)^\sigma \cong (U(1) \times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4$, $\boldsymbol{Z}_4 = \{(1, \phi(1)), (-1, \phi(-1)), (i, \varphi(-i)), (-i, \varphi(i))\}$.

証明 写像 $\varphi: U(1) \times Spin(10) \to (E_6)^\sigma$ を

$$\varphi(\theta, \beta) = \phi(\theta)\beta$$

で定義する. $\phi(\theta) \in U(1)$ と $\beta \in Spin(10)$ は可換である (補題3.16) から, φ は群準同型写像である. φ は全射である. 実際, $\alpha \in (E_6)^\sigma$ に対し

$$\alpha E_1 = \theta^4 E_1 = \phi(\theta) E_1$$

となる $\theta \in U(1)$ が存在する (補題3.11). $\beta = \phi(\theta)^{-1}\alpha$ とおくと $\beta E_1 = E_1$ となるから $\beta \in Spin(10)$ である. よって $\alpha = \phi(\theta)\beta = \varphi(\theta, \beta)$ となる. $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(\theta, \phi(\theta)^{-1}) \mid \theta \in C, \theta^4 = 1\} = \{(\theta, \phi(\theta^{-1}) \mid \theta = \pm 1, \pm i\} = \boldsymbol{Z}_4$ である. よって Lie 群の同型 $(U(1) \times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4 \cong (E_6)^\sigma$ を得る.

6　E_6 の対合自己合型写像 γ と部分群 $(Sp(1)\times SU(6))/Z_2$

$\gamma\in G_2\subset F_4$ の複素化写像 $\gamma:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ を考える．$\gamma\in G_2\subset F_4\subset E_6$ であり，$\gamma^2=1$ である．E_6 の部分群

$$(E_6)^\gamma=\{\alpha\in E_6\,|\,\gamma\alpha=\alpha\gamma\}$$

を調べよう．F_4, 8 と同様の同一視

$$\mathfrak{J}^C=\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C\oplus(\boldsymbol{H}^3)^C$$

$(\mathfrak{J}_{\boldsymbol{H}}{}^C=\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C)$ を用いる．なお，いくつかの準備をする．

$\boldsymbol{C}=\{x+ye_1\,|\,x,y\in\boldsymbol{R}\}\subset\mathfrak{C}$ とする．$a=x+ye_1\in\mathfrak{C}$ に対し，$x+yi\in C$ を a' と表すことにし，$\boldsymbol{R}$-線型写像 $k:\boldsymbol{H}\to M(2,C)$ を

$$k(a+be_2)=\begin{pmatrix}a' & b'\\ -\tau b' & \tau a'\end{pmatrix},\quad a,b\in\boldsymbol{C}$$

で定義する．この k は自然に $\boldsymbol{R}$-線型写像

$$k:M(3,\boldsymbol{H})\to M(6,C),\quad k:\boldsymbol{H}^3\to M(2,6,C)$$

に拡張され，次の (1)—(4) が成り立つ．ここに

$$J=\begin{pmatrix}J & 0 & 0\\ 0 & J & 0\\ 0 & 0 & J\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

とする．

(1)　$k(MN)=(kM)(kN)$,　　$M, N\in M(3,\boldsymbol{H})$

(2)　$\tau\,{}^t(kM)=k(M^*)$,　　$M\in M(3,\boldsymbol{H})$

(3)　$J(kM)=(\tau(kM))J$,　　$M\in M(3,\boldsymbol{H})$

(4)　$k(\boldsymbol{a}M)=(k\boldsymbol{a})(kM)$,　　$\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{H}^3$,　$M\in M(3,\boldsymbol{H})$.

さらに，C-線型写像 $k:M(3,\boldsymbol{H})^C\to M(6,C)$, $k:(\boldsymbol{H}^3)^C\to M(2,6,C)$ をそれぞれ

$$k(M_1+iM_2)=kM_1+ikM_2,\quad M_1,M_2\in M(3,\boldsymbol{H}),$$
$$k(\boldsymbol{a}_1+i\boldsymbol{a}_2)=k\boldsymbol{a}_1+ik\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\in\boldsymbol{H}^3$$

で定義すると，上記の (1), (4) が成り立つ．つぎに，C-ベクトル空間 $\mathfrak{S}(6,C)$ を

$$\mathfrak{S}(6,C)=\{S\in M(6,C)\,|\,{}^tS=-S\}$$

で定義し，C-線型写像 $k_J:\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C\to\mathfrak{S}(6,C)$ を

$$k_JM=(kM)J$$

で定義する．k_J は well-defined である．実際，$M\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C$ に対し，${}^t(k_JM)$

$={}^t((kM)J)=-J\,{}^t(kM)=-J\,{}^t(kM_1+ikM_2)=-(\tau\,{}^t(kM_1)+i\tau\,{}^t(kM_2))J=-(k(M_1{}^*)+ik(M_2{}^*))J=-(kM_1+ikM_2)J=-(kM)J=-k_JM$，$M_i\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})$ である．最後に，$\mathfrak{S}(6,C)$，$M(2,6,C)$ に Hermite 内積 $\langle S,T\rangle$，$\langle P,Q\rangle$ をそれぞれ

$$\langle S,T\rangle=\mathrm{tr}((\tau\,{}^tS)T),\quad \langle P,Q\rangle=\mathrm{tr}((\tau\,{}^tP)Q)$$

で定義しておく．

補題3.18 (1) $k:M(3,\boldsymbol{H})^C\to M(6,C)$, $k:(\boldsymbol{H}^3)^C\to M(2,6,C)$, $k_J:\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C\to\mathfrak{S}(6,C)$ はいずれも C-同型写像である．

(2) $\langle k_JM,k_JN\rangle=2\langle M,N\rangle$，$M,N\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C$,

$\langle k\boldsymbol{a},k\boldsymbol{b}\rangle=2\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in(\boldsymbol{H}^3)^C$.

(3) $\det(k_JM)=(\det M)^2$，$M\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H})^C$.

証明 (1) $k:M(3,\boldsymbol{H})^C\to M(6,C)$ は単射である．実際，$k((a+be_2)+i(c+de_2))=0$，$a,b,c,d\in\boldsymbol{C}$ とするとき $\begin{pmatrix}a' & b'\\ -\tau b' & \tau a'\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}c' & d'\\ -\tau d' & \tau c'\end{pmatrix}=0$ より $a=b=c=d=0$ となるからである．次に，$\dim_C M(3,\boldsymbol{H})^C=36=\dim_C M(6,C)$ であるから，k は C-同型写像である．他も同様である．

(2) $m_i=a_i+b_ie_2$，$n_i=c_i+d_ie_2$，$a_i,b_i,c_i,d_i\in\boldsymbol{C}$，$i=1,2$ に対して

$$\langle k(m_1+in_1),\,k(m_1+in_2)\rangle=2\langle m_1+in_1,\,m_2+in_2\rangle$$

が成り立つことが計算で確かめられるからである．

(3) $\det(k_JM)=\det(kM)$ と $\det M$ の値は C にあることに注意しよう．交代行列 S の行列式 $\det S$ はその成分 s_{ij} の多項式の平方で表されるということを知っているので

$$\det\begin{pmatrix}0 & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16}\\ -s_{12} & 0 & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26}\\ -s_{13} & -s_{23} & 0 & s_{34} & s_{35} & s_{36}\\ -s_{14} & -s_{24} & -s_{34} & 0 & s_{45} & s_{46}\\ -s_{15} & -s_{25} & -s_{35} & -s_{45} & 0 & s_{56}\\ -s_{16} & -s_{26} & -s_{36} & -s_{46} & -s_{56} & 0\end{pmatrix}$$

$$=(s_{12}s_{34}s_{56}-s_{12}s_{35}s_{46}+s_{12}s_{36}s_{45}-s_{13}s_{24}s_{56}+s_{13}s_{25}s_{46}-s_{13}s_{26}s_{45}+s_{14}s_{23}s_{56}-s_{14}s_{25}s_{36}$$
$$+s_{14}s_{26}s_{35}-s_{15}s_{23}s_{46}+s_{15}s_{24}s_{36}-s_{15}s_{26}s_{35}+s_{16}s_{23}s_{45}-s_{16}s_{24}s_{35}+s_{16}s_{25}s_{34})^2$$

となることが容易に分かる．k_JM は交代行列であるから，上記の公式を用いると（$m=a+ib$，$a,b\in C$ に対して，$a-ib$ を記号 $\overline{m}$ で表している（この記

号はここにおいてのみ用いられる)).

$$\det(k_J M)=\det\begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & -n_3 & m_3 & n_2 & \overline{m}_2 \\ -\xi_1 & 0 & -\overline{m}_3 & -\overline{n}_3 & -m_2 & \overline{n}_2 \\ n_3 & \overline{m}_3 & 0 & \xi_2 & -n_1 & m_1 \\ -m_3 & \overline{n}_3 & -\xi_2 & 0 & -\overline{m}_1 & -\overline{n}_1 \\ -n_2 & m_2 & n_1 & \overline{m}_1 & 0 & \xi_3 \\ -\overline{m}_2 & -\overline{n}_2 & -m_1 & \overline{n}_1 & -\xi_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=(\xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1 n_1\overline{n}_1-\xi_1 m_1\overline{m}_1-n_3\overline{n}_3\xi_3-n_3m_2\overline{n}_1-n_3\overline{n}_2\overline{m}_1-m_3\overline{m}_3\xi_3$$

$$+m_3m_2m_1-m_3\overline{n}_2n_1-n_2\overline{m}_3\overline{n}_1-n_2\overline{n}_3m_1-n_2\overline{n}_2\xi_2+\overline{m}_2\overline{m}_3\overline{m}_1$$

$$-\overline{m}_2\overline{n}_3n_1-\overline{m}_2m_2\xi_2)^2$$

となる.一方

$$\det\begin{pmatrix} \xi_1 & m_3+n_3e_2 & \overline{m_2+n_2e_2} \\ \overline{m_3+n_3e_2} & \xi_2 & m_1+n_1e_2 \\ m_2+n_2e_2 & \overline{m_1+n_1e_2} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

$$=\xi_1\xi_2\xi_3+(m_1+n_1e_2)(m_2+n_2e_2)(m_3+n_3e)$$

$$+\overline{(m_1+n_1e_2)(m_2+n_2e_2)(m_3+n_3e_2)}-\sum_{i=1}^{3}\xi_i(m_i+n_ie_2)\overline{(m_i+n_ie_2)}$$

$=$上式の括弧内

である.

E_6 と同様に,群 $E_{6,H}$ を

$$E_{6,H}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}_H{}^C)\,|\,\det\alpha X=\det X, \langle\alpha X, \alpha Y\rangle=\langle X, Y\rangle\}$$

で定義する.

補題3.19 $E_{6,H}$ は連結な Lie 群であり,その次元は35である.

証明 $E\mathrm{IV}_H=\{M\in\mathfrak{J}_H{}^C\,|\,\det M=1, \langle M, M\rangle=3\}$ とおくと,定理3.8と同様にして,同相

$$E_{6,H}/F_{4,H}\simeq E\mathrm{IV}_H$$

を得る.$E\mathrm{IV}_H$ と $F_{4,H}\cong Sp(3)/\boldsymbol{Z}_2$ (命題2.26) が連結であるから,$E_{6,H}$ も連結である.$E_{6,H}$ の Lie 環 $\mathfrak{e}_{6,H}$ は

$$\mathfrak{e}_{6,H}=\mathfrak{f}_{4,H}\oplus i(\widetilde{\mathfrak{J}}_H)_0$$

となる (定理3.4) ので,その次元は $21+14=35$ である.

命題3.20 $$E_{6,H}\cong SU(6)/\boldsymbol{Z}_2,\quad \boldsymbol{Z}_2=\{E, -E\}.$$

証明　$SU(6)=\{A\in M(6,C)\,|\,(\tau{}^tA)A=E, \det A=1\}$ とし，写像 φ：$SU(6)\to E_{6,H}$ を

$$\varphi(A)M=k_J{}^{-1}(A(k_JM){}^tA), \qquad M\in\mathfrak{J}_H{}^C$$

で定義する．そのために，まず $\varphi(A)\in E_{6,H}$ を示さなければならない．実際，$(\det(\varphi(A)M))^2=\det(k_J(\varphi(A)M))$（補題3.18）$=\det(A(k_JM){}^tA)=\det(k_JM)=(\det M)^2$（補題3.18）より，$\det(\varphi(A)M)=\pm\det M$ となる．しかるに $E_{6,H}$ は連結である（補題3.19）から $\det(\varphi(A)M)$ の符号は A に関して一定である（$\det M\neq0$ とした）．よって $\det(\varphi(A)M)=\det M$ となる．次に $2\langle\varphi(A)M, \varphi(A)N\rangle=\langle k_J(\varphi(A)M), k_J(\varphi(A)N)\rangle$（補題3.18）$=\langle A(k_JM){}^tA, A(k_JN){}^tA\rangle=\langle k_JM, k_JN\rangle$（$A\in SU(6)$ より）$=2\langle M, N\rangle$（補題3.18）である．以上で $\varphi(A)\in E_{6,H}$ が示された．明らかに φ は群準同型写像である．$\mathrm{Ker}\,\varphi=\{E,-E\}=\boldsymbol{Z}_2$ は容易である．$E_{6,H}$ は連結であり，$\dim SU(6)=35=\dim E_{6,H}$（補題3.19）であるから，Lie 群の同型 $SU(6)/\boldsymbol{Z}_2\cong E_{6,H}$ を得る（[3]命題8.7）．

定理3.21　　$(E_6)^\gamma\cong(Sp(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2$,　$\boldsymbol{Z}_2=\{(1,E),(-1,-E)\}$,

証明　写像 φ：$Sp(1)\times SU(6)\to(E_6)^\gamma$ を

$$\varphi(p,A)(M+\boldsymbol{a})=k_J{}^{-1}(A(k_JM){}^tA)+p\boldsymbol{a}k^{-1}(\tau{}^tA),$$

$M+\boldsymbol{a}\in\mathfrak{J}_H{}^C\oplus(\boldsymbol{H}^3)^C=\mathfrak{J}^C$，で定義する．そのために，まず $\varphi(p,A)\in(E_6)^\gamma$ を示さなければならない．

主張3.22　(1)　${}^t\varphi(p,A)^{-1}=\tau\varphi(p,A)\tau$.

証明　$2\langle\tau{}^t\varphi(p,A)\tau(M+\boldsymbol{a}), N+\boldsymbol{b}\rangle \qquad M+\boldsymbol{a},\ N+\boldsymbol{b}\in\mathfrak{J}^C$

$$\begin{aligned}
&=2\langle M+\boldsymbol{a}, \varphi(p,A)(N+\boldsymbol{b})\rangle\\
&=2\langle M+\boldsymbol{a}, k_J{}^{-1}(A(k_JN){}^tA)+p\boldsymbol{b}k^{-1}(\tau{}^tA)\rangle\\
&=2\langle M, k_J{}^{-1}(A(k_JN){}^tA)\rangle+4\langle\boldsymbol{a}, p\boldsymbol{b}k^{-1}(\tau{}^tA)\rangle\\
&=\langle k_JM, A(k_JN){}^tA\rangle+2\langle k(\overline{p}\boldsymbol{a}), (k\boldsymbol{b})\tau{}^tA\rangle\\
&=\langle\tau{}^tA(k_JM)\tau A, k_JN\rangle+2\langle k(\overline{p}\boldsymbol{a})A, k\boldsymbol{b}\rangle\\
&=2\langle k_J{}^{-1}(\tau{}^tA(k_JM)\tau A), N\rangle+4\langle\overline{p}\boldsymbol{a}k^{-1}(A), \boldsymbol{b}\rangle\\
&=2\langle k_J{}^{-1}(\tau{}^tA(k_JM)\tau A+\overline{p}\boldsymbol{a}k^{-1}(A)), N+\boldsymbol{b}\rangle\\
&=2\langle\varphi(\overline{p}, \tau{}^tA)(M+\boldsymbol{a}), N+\boldsymbol{b}\rangle
\end{aligned}$$

より，$\tau{}^t\varphi(p,A)\tau=\varphi(\overline{p},\tau{}^tA)$ である．よって ${}^t\varphi(p,A)^{-1}=\tau\varphi(p,A)\tau$ となる．

主張3.22 (2)　$\varphi(p, A)\in(E_6)^\gamma$.

証明　$\alpha=\varphi(p, A)$ が $\alpha X\times\alpha Y={}^t\alpha^{-1}(X\times Y)$, $X, Y\in\mathfrak{J}^C$ を満たすことを示そう．公式

$$(M+\boldsymbol{a})\times(N+\boldsymbol{b})=\Big(M\times N-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a})\Big)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}N+\boldsymbol{b}M)$$

を思い出そう．$\alpha M\times\alpha N={}^t\alpha^{-1}(M\times N)$ は $\det\alpha M=\det M$（命題3.20）に他ならない．次に

$$k_J{}^{-1}M=-k^{-1}(MJ)=-k^{-1}(J(\tau M)),\quad \tau k^{-1}M=-k^{-1}(JMJ)$$

の公式を用いて

$$\begin{aligned}
(\alpha\boldsymbol{a})^*(\alpha\boldsymbol{b})&=(p\boldsymbol{a}k^{-1}(\tau{}^tA))^*(p\boldsymbol{b}k^{-1}(\tau{}^tA))\\
&=k^{-1}(A)\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}k^{-1}(\tau{}^tA),\\
\tau\alpha\tau(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b})&=\tau(k_J{}^{-1}(A(k_J\tau(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b})){}^tA))\\
&=-\tau k^{-1}(J\tau(A(k(\tau(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b})))J{}^tA))\\
&=-\tau k^{-1}(J\tau(AJ\tau k(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}){}^tA))\\
&=-\tau k^{-1}(J\tau AJk(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b})\tau{}^tA)\\
&=-k^{-1}(A\tau k(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b})J{}^tAJ)=k^{-1}(A)\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}k^{-1}(\tau{}^tA),\\
(\alpha\boldsymbol{a})(\alpha N)&=(p\boldsymbol{a}k^{-1}(\tau{}^tA))k_J{}^{-1}(A(k_JN){}^tA)\\
&=-p\boldsymbol{a}k^{-1}(\tau{}^tA)k^{-1}(A(kN)J{}^tAJ)\\
&=-p\boldsymbol{a}Nk^{-1}(J{}^tAJ)=p\boldsymbol{a}N\tau k^{-1}(\tau{}^tA),\\
\tau\alpha\tau(\boldsymbol{a}N)&=\tau(p\tau(\boldsymbol{a}N)k^{-1}(\tau{}^tA))=p\boldsymbol{a}N\tau k^{-1}(\tau{}^tA)
\end{aligned}$$

となる．以上より $\alpha\in E_6$ である．$\gamma\alpha=\alpha\gamma$ は明らかであるから $\alpha\in(E_6)^\gamma$ である．

さて，φ が群準同型写像であることは明らかである．φ の全射を示そう．$\alpha\in(E_6)^\gamma$ とする．α の $\mathfrak{J}_H{}^C$ への制限 $\alpha'=\alpha|\mathfrak{J}_H{}^C$ は $\alpha'\in E_{6,H}$ となるから，$\alpha'=\varphi(A)$ となる $A\in SU(6)$ が存在する（命題3.20）．$\beta=\varphi(1, A)^{-1}\alpha$ とおくと，$\beta|\mathfrak{J}_H{}^C=1$ である．定理2.27と同様にして，$\beta=\varphi(p, E)$, $p\in Sp(1)$ となる．よって $\alpha=\varphi(1, A)\beta=\varphi(1, A)\varphi(p, E)=\varphi(p, A)$ となり，φ は全射である．$\operatorname{Ker}\varphi=\{(1, E), (-1, -E)\}$ は容易である．よって Lie 群の同型 $(Sp(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2\cong(E_6)^\gamma$ を得る．（注意．E_7, **9** の方法（補題4.32，命題4.34）を用いても証明することができる）．

7 E_6 の対合自己同型写像 $\lambda\gamma$ と部分群 $Sp(4)/Z_2$

E_6 の群自己同型写像 $\lambda\gamma$ を考え，E_6 の部分群

$$(E_6)^{\lambda\gamma}=\{\alpha\in E_6 \mid \gamma\lambda(\alpha)\gamma=\alpha\}$$
$$=\{\alpha\in E_6 \mid \tau\gamma\alpha=\alpha\tau\gamma\}=(E_6)^{\tau\gamma}$$

を調べよう．そのため，$\mathfrak{J}^C$ の $\boldsymbol{R}$-線型写像 $\tau\gamma$ による固有空間

$$(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}=\{X\in\mathfrak{J}^C \mid \tau\gamma X=X\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\mu_1 & m_3 & \overline{m}_2\\ \overline{m}_3 & \mu_2 & m_1\\ m_2 & \overline{m}_1 & \mu_3\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0 & a_3e & -a_2e\\ -a_3e & 0 & a_1e\\ a_2e & -a_1e & 0\end{pmatrix}\middle|\begin{matrix}\mu_i\in\boldsymbol{R}\\ m_i,\ a_i\in\boldsymbol{H}\end{matrix}\right\}$$
$$=\{M+iF(\boldsymbol{a}e) \mid M\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H}),\ \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{H}^3\}$$
$$=\mathfrak{J}_H\oplus i\boldsymbol{H}^3,$$
$$(\mathfrak{J}^C)_{-\tau\gamma}=\{X\in\mathfrak{J}^C \mid \tau\gamma X=-X\}$$
$$=\left\{i\begin{pmatrix}\mu_1 & m_3 & \overline{m}_2\\ \overline{m}_3 & \mu_2 & m_1\\ m_2 & \overline{m}_1 & \mu_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_3e & -a_2e\\ -a_3e & 0 & a_1e\\ a_2e & -a_1e & 0\end{pmatrix}\middle|\begin{matrix}\mu_i\in\boldsymbol{R}\\ m_i,\ a_i\in\boldsymbol{H}\end{matrix}\right\}$$
$$=\{iM+F(\boldsymbol{a}e) \mid M\in\mathfrak{J}(3,\boldsymbol{H}),\ \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{H}^3\}$$
$$=i\mathfrak{J}_H\oplus\boldsymbol{H}^3=i(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$$

を考える．$\mathfrak{J}^C=(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}\oplus(\mathfrak{J}^C)_{-\tau\gamma}$ であり，$(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$，$(\mathfrak{J}^C)_{-\tau\gamma}$ は $(E_6)^{\tau\gamma}$ の作用で不変である．また，$\mathfrak{J}^C$ は $(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$ の複素化になっている：$\mathfrak{J}^C=((\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma})^C$．

$\boldsymbol{R}$-ベクトル空間

$$\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})=\{P\in M(4,\boldsymbol{H}) \mid P^*=P\}$$

を考え，$\mathfrak{J}_H$ と同様に，Jordan 積 $P\circ Q$，内積 (P, Q) をそれぞれ

$$P\circ Q=\frac{1}{2}(PQ+QP),\quad (P, Q)=\mathrm{tr}(P\circ Q)$$

で定義する．$A\in Sp(4)$ に対して

$$A(P\circ Q)A^*=APA^*\circ AQA^*,\quad (APA^*, AQA^*)=(P, Q)$$

が成り立っている．$\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})^C$ を $\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})$ の複素化とし，$\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})^C$ に Jordan 積，内積を自然に拡張し，さらに Hermite 内積 $\langle P, Q\rangle$ を

$$\langle P, Q\rangle=(\tau P, Q)$$

で定義する．$A\in Sp(4)$ の作用も自然に $\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})^C$ に拡張され

$$\langle APA^*, AQA^*\rangle=\langle P, Q\rangle$$

が成り立つ．なお，$\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0=\{P\in\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H}) \mid \mathrm{tr}(P)=0\}$ とし，$\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0{}^C$ はその複素化を表すのはいつもの通りである．

定義 C-線型写像 $g : \mathfrak{J}^C = \mathfrak{J}_H{}^C \oplus (\boldsymbol{H}^3)^C \to \mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})_0{}^C$ を

$$g(M+\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M) & i\boldsymbol{a} \\ i\boldsymbol{a}^* & M - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M)E \end{pmatrix}$$

で定義する．

補題3.23 $g : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})_0{}^C$ は C-同型写像であり，

$$gX \circ gY = g(\gamma(X \times Y)) + \frac{1}{4}(\gamma X, Y)E,$$

$$(gX, gY) = (\gamma X, Y)$$

が成り立つ．さらに g は

$$\langle gX, gY \rangle = \langle X, Y \rangle$$

を満たしている．また，g の $(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$ への制限は $\boldsymbol{R}$-同型写像 $g : (\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma} \to \mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})_0$ を誘導している．

証明 g の well-defined と単射は明らかである．$\dim_C \mathfrak{J}^C = 27 = \dim_C \mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})_0{}^C$ であるから g は C-同型写像である．次に $X = M + \boldsymbol{a}$, $Y = N + \boldsymbol{b} \in \mathfrak{J}_H{}^C \oplus (\boldsymbol{H}^3)^C = \mathfrak{J}^C$ に対し

$$\begin{aligned} g(\gamma(X \times Y)) &= g(\gamma((M+\boldsymbol{a}) \times (N+\boldsymbol{b}))) \\ &= g((M-\boldsymbol{a}) \times (N-\boldsymbol{b})) \\ &= g((M \times N - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a})) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}N + \boldsymbol{b}M)) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M \times N) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \frac{i}{2}(\boldsymbol{a}M + \boldsymbol{b}N) \\ \frac{i}{2}(\boldsymbol{a}N + \boldsymbol{b}M)^* & M \times N - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}) - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(M \times N) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))E \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \cdots \\ &= g(M+\boldsymbol{a}) \circ g(N+\boldsymbol{b}) - \left(\frac{1}{4}(M, N) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right)E \\ &= g(M+\boldsymbol{a}) \circ g(N+\boldsymbol{b}) - \frac{1}{4}(\gamma(M+\boldsymbol{a}), (N+\boldsymbol{b}))E \\ &= gX \circ gY - \frac{1}{4}(\gamma X, Y)E \end{aligned}$$

である．この両辺の trace をとり $0 = (gX, gY) - (\gamma X, Y)$ を得る．$g : (\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma} \to \mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})_0$ が $\boldsymbol{R}$-同型写像であることは容易である．$X, Y \in (\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$ な

らば$(\gamma X, Y)=\langle X, Y\rangle$であることを注意すると

$$\langle g(X_1+iX_2), g(Y_1+iY_2)\rangle=\langle X_1+iX_2, Y_1+iY_2\rangle, \qquad X_i, Y_i\in(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$$

が示される．以上で補題が証明された．

定理3.24 $$(E_6)^{\lambda\gamma}\cong Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2, \quad \boldsymbol{Z}_2=\{E, -E\}.$$

証明 写像φ：$Sp(4)\to(E_6)^{\lambda\gamma}=(E_6)^{\tau\gamma}$を

$$\varphi(A)X=g^{-1}(A(gX)A^*), \qquad X\in\mathfrak{J}^C$$

で定義する．そのために，まず$\varphi(A)\in(E_6)^{\tau\gamma}$を示さねばならない．$Z=\varphi(A)X$とおき，補題3.23を用いると

$$\begin{aligned}3\det(\varphi(A)X)&=3\det Z=(Z\times Z, Z)=(g(\gamma(Z\times Z)), gZ)\\&=\left(gZ\circ gZ-\frac{1}{4}(\gamma Z, Z)E, gZ\right)\\&=\left(gZ\circ gZ-\frac{1}{4}(gZ, gZ)E, gZ\right)\\&=\left(A(gX)A^*\circ A(gX)A^*-\frac{1}{4}(A(gX)A^*, A(gX)A^*)E, A(gX)A^*\right)\\&=\left(gX\circ gX-\frac{1}{4}(gX, gX)E, gX\right)\\&=\left(gX\circ gX-\frac{1}{4}(\gamma X, X)E, gX\right)\\&=(g(\gamma(X\times X)), gX)=(X\times X, X)=3\det X,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\varphi(A)X, \varphi(A)Y\rangle&=\langle g\varphi(A)X, g\varphi(A)Y\rangle=\langle A(gX)A^*, A(gY)A^*\rangle\\&=\langle gX, gY\rangle=\langle X, Y\rangle\end{aligned}$$

より$\varphi(A)\in E_6$である．次に$\tau\gamma\varphi(A)\tau\gamma=\varphi(A)$を示すには$\mathfrak{J}^C=((\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma})^C$より

$$\tau\gamma\varphi(A)\tau\gamma X=\varphi(A)X, \qquad X\in(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$$

を示せばよいが，これは明らかである．実際，$X\in(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$ならば$gX\in\mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})_0$より$\varphi(A)X\in(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$となるので$\tau\gamma\varphi(A)\tau\gamma X=\tau\gamma\varphi(A)X=\varphi(A)X$となるからである．明らかに$\varphi$は群準同型写像である．$\varphi$が全射であることを示そう．$\alpha\in(E_6)^{\tau\gamma}$とすると

$$(g(\alpha E))^2=g(\alpha E)+\frac{3}{4}E$$

が成り立つ．実際，$(g(\alpha E))^2=g(\alpha E)\circ g(\alpha E)=g(\gamma(\alpha E\times\alpha E))+\frac{1}{4}(\gamma\alpha E, \alpha E)$

(補題3.23) $=g(\gamma\tau\alpha\tau E)+\frac{1}{4}\langle\tau\gamma\alpha E,\alpha E\rangle E=g(\alpha\tau\gamma E)+\frac{1}{4}\langle\alpha\tau\gamma E,\alpha E\rangle E=g(\alpha E)+\frac{3}{4}E$ である．

$$P=\frac{1}{4}(2g(\alpha E)+E)$$

とおくと，$P\in\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})$，$P^2=P$，$\mathrm{tr}(P)=1$ となる．実際，$P^2=\frac{1}{16}(4(g(\alpha E))^2+4g(\alpha E)+E)=\frac{1}{4}(2g(\alpha E)+E)=P$，$\mathrm{tr}(P)=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(2g(\alpha E))+\frac{1}{4}\mathrm{tr}(E)=0+1=1$ である．よって，ある $A\in Sp(4)$ が存在して

$$P=AE_1A^*$$

となる(ここに $E_1=\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M(4,\boldsymbol{R})$ とする)([1]補題26)．$gE=2E_1-\frac{E}{2}$ に注意すると，$\varphi(A)E=g^{-1}(A(gE)A^*)=g^{-1}\Big(A\Big(2E_1-\frac{E}{2}\Big)A^*\Big)=g^{-1}\Big(2AE_1A_1{}^*-\frac{E}{2}\Big)=g^{-1}\Big(2P-\frac{E}{2}\Big)=g^{-1}(g(\alpha E))=\alpha E$ となる．$\beta=\varphi(A)\alpha^{-1}$ とおくと，$\beta E=E$ より $\beta\in F_4$ (定理3.5) となる．$\tau\gamma\beta=\beta\tau\gamma$，$\tau\beta=\beta\tau$ (定理3.5) より $\gamma\beta=\beta\gamma$，すなわち $\beta\in(F_4)^\gamma$ になる．よって定理2.27より，$p\in Sp(1)$，$D\in Sp(3)$ が存在して

$$\beta(M+\boldsymbol{a})=DMD^*+p\boldsymbol{a}D^*,\qquad M+\boldsymbol{a}\in\mathfrak{J}_H\oplus\boldsymbol{H}^3=\mathfrak{J}$$

となる．$B=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$ とおくと，$B\in Sp(4)$ であって

$$\beta=\varphi(B)$$

となる．実際，

$$\begin{aligned}\varphi(B)(M+\boldsymbol{a})&=g^{-1}(Bg(M+\boldsymbol{a})B^*)\\ &=g^{-1}\left(\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M) & i\boldsymbol{a}\\ i\boldsymbol{a}^* & M-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M)E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{p} & 0\\ 0 & D^*\end{pmatrix}\right)\\ &=g^{-1}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M) & ip\boldsymbol{a}D^*\\ iD\boldsymbol{a}^*\,\overline{p} & DMD^*-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M)E\end{pmatrix}\right)\\ &=DMD^*+p\boldsymbol{a}D^*,\qquad M+\boldsymbol{a}\in\mathfrak{J}_H{}^C\oplus(\boldsymbol{H}^3)^C=\mathfrak{J}^C\end{aligned}$$

である．よって $\alpha=\varphi(A)\beta=\varphi(A)\varphi(B)=\varphi(AB)$，$AB\in Sp(4)$ となり，φ の全射が示された．Ker $\varphi=\{E,-E\}=\boldsymbol{Z}_2$ は容易である．よって Lie 群の同型

$Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2 \cong (E_6)^{\tau\gamma}$ を得る.

8　$\mathfrak{e}_6{}^C$ の単純性

補題3.25　$\mathfrak{e}_6{}^C$ の Lie 積 $[\phi_1, \phi_2]$ は

$$[\delta_1+\tilde{T}_1, \delta_2+\tilde{T}_2]=([\delta_1, \delta_2]+[\tilde{T}_1, \tilde{T}_2])+(\widetilde{\delta_1 T_2}-\widetilde{\delta_2 T_1})$$

$(\phi_i=\delta_i+\tilde{T}_i,\ \delta_i\in\mathfrak{f}_4{}^C,\ T_i\in\mathfrak{J}_0{}^C$（定理3.2)）で与えられる.

証明　$\delta\in\mathfrak{f}_4{}^C$, $T\in\mathfrak{J}_0{}^C$ に対し $[\delta, \tilde{T}]=\widetilde{\delta T}$ を示せばよい. しかし, それは

$$[\delta, \tilde{T}]X=\delta(T\circ X)-T\circ\delta X=\delta T\circ X+T\circ\delta X-T\circ\delta X$$
$$=\delta T\circ X=\widetilde{\delta T}X,\ \ X\in\mathfrak{J}^C$$

よりよい.

定理3.26　C-Lie 環 $\mathfrak{e}_6{}^C$ は単純である. したがって($\mathfrak{e}_6$ の複素化が $\mathfrak{e}_6{}^C$ になることを後で（命題3.41）示すので）Lie 環 $\mathfrak{e}_6$ も単純である.

証明　$\mathfrak{e}_6{}^C=\mathfrak{f}_4{}^C\oplus\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C$ (定理3.2) において, $p: \mathfrak{e}_6{}^C\to\mathfrak{f}_4{}^C$, $q: \mathfrak{e}_6{}^C\to\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C$ を射影とする. さて, $\{0\}\neq\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{e}_6{}^C$ の ideal とする. $p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{f}_4{}^C$ の ideal である. 実際, $\delta\in p(\mathfrak{a})$ とすると, $T\in\mathfrak{J}_0{}^C$ が存在して $\delta+\tilde{T}\in\mathfrak{a}$ となる. 任意の $\delta_1\in\mathfrak{f}_4{}^C$ に対して

$$\mathfrak{a}\ni[\delta_1, \delta+\tilde{T}]=[\delta_1, \delta]+\widetilde{\delta T}$$

(補題3.25) となるので $[\delta_1, \delta]\in p(\mathfrak{a})$ である.

(1)　$\mathfrak{f}_4{}^C\cap\mathfrak{a}=\{0\}$, $\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C\cap\mathfrak{a}=\{0\}$ のとき(この場合は起らない). $\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C\cap\mathfrak{a}=\{0\}$ であるから, $p|\mathfrak{a}: \mathfrak{a}\to\mathfrak{f}_4{}^C$ は単射である. $\{0\}\neq p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{f}_4{}^C$ の ideal で, $\mathfrak{f}_4{}^C$ は単純である(定理2.31)から, $p(\mathfrak{a})=\mathfrak{f}_4{}^C$ である. よって $\dim_C\mathfrak{a}=\dim_C p(\mathfrak{a})=\dim_C\mathfrak{f}_4{}^C=52$ である. 一方, $\mathfrak{f}_4{}^C\cap\mathfrak{a}=\{0\}$ であるから, $q|\mathfrak{a}: \mathfrak{a}\to\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C$ も単射である. よって $\dim_C\mathfrak{a}\leqq\dim_C\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C=\dim_C\mathfrak{J}_0{}^C=26$ となり, 上記に矛盾する.

(2)　$\mathfrak{f}_4{}^C\cap\mathfrak{a}\neq\{0\}$ のとき. $\mathfrak{f}_4{}^C$ は単純であるから $\mathfrak{f}_4{}^C\cap\mathfrak{a}=\mathfrak{f}_4{}^C$ となり, $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{f}_4{}^C$ である. 一方

$$\mathfrak{a}\supset[\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_6{}^C]\supset[\mathfrak{f}_4{}^C, \tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C]=(\mathfrak{f}_4{}^C\mathfrak{J}_0{}^C)^\sim\ (\text{補題3.25})=\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C\ (\text{定理2.33})$$

となる. よって $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{f}_4{}^C\oplus\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C=\mathfrak{e}_6{}^C$ となり $\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_6{}^C$ を得る.

(3)　$\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C\cap\mathfrak{a}\neq\{0\}$ のとき. $0\neq\tilde{A}\in\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C\cap\mathfrak{a}$ をとる. $[\tilde{A}, \tilde{B}]\neq0$ となる $B\in\mathfrak{J}_0{}^C$ を選ぶ（補題2.37）と, $0\neq[\tilde{A}, \tilde{B}]\in\mathfrak{f}_4{}^C\cap\mathfrak{a}$ となり (2) に帰着される.

以上で $\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_6{}^C$ となり，$\mathfrak{e}_6{}^C$ の単純性が示された.

定理3.27　(1)　$\mathfrak{J}^C$ は $\mathfrak{e}_6{}^C$-既約 C-加群である.

(2)　$\mathfrak{e}_6{}^C\mathfrak{J}^C=\left\{\sum_i \phi_i A_i \mid \phi_i\in\mathfrak{e}_6{}^C, A_i\in\mathfrak{J}^C\right\}=\mathfrak{J}^C$.

証明　(1)　$\{0\}\neq W$ を $\mathfrak{J}^C$ の $\mathfrak{e}_6{}^C$-不変部分 C-加群とする. $A\in\mathfrak{J}^C$, $X\in W$ に対し $A\circ X\in W$ となる. 実際,

$$A\circ X=\left(A-\frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)E\right)^{\sim}X+\frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)X\in W$$

である. さて，$0\neq X=X(\xi, x)\in W$ をとる.

(i)　$\xi_1\neq 0$ のとき, $\xi_1E_1=E_1\circ(2E_1\circ X-X)\in W$ より $E_1\in W$ となる. $F_2(1)=2F_2(1)\circ E_1\in W$, $E_1+E_3=F_2(1)\circ F_2(1)\in W$, $E_3=(E_1+E_3)-E_1\in W$ となる. 同様に $E_2\in W$ となり $E=E_1+E_2+E_3\in W$ を得る. 任意の $X\in\mathfrak{J}^C$ に対し $X=X\circ E\in W$ となり $W=\mathfrak{J}^C$ を得る. $\xi_2\neq 0$, $\xi_3\neq 0$ のときも同様である.

(ii)　$\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$, $x_1\neq 0$ のとき. $F_1(x_1)=4E_3\circ(E_2\circ X)\in W$ となる. $(a, x_1)=1$ となる $a\in\mathfrak{C}^C$ をとると, $F_1(a)\circ F_1(x_1)=E_2+E_3\in W$ となり(i)に帰着される. 以上で証明された.

(2)　$\mathfrak{e}_6{}^C\mathfrak{J}^C$ は $\mathfrak{J}^C$ の $\mathfrak{e}_6{}^C$-不変 C-部分加群であるから, (1)より $\mathfrak{e}_6{}^C\mathfrak{J}^C=\mathfrak{J}^C$ となる.

9　$\mathfrak{e}_6{}^C$ の元 $A\vee B$

定義　$A, B\in\mathfrak{J}^C$ に対し，$A\vee B\in\mathfrak{e}_6{}^C$ を

$$A\vee B=[\tilde{A}, \tilde{B}]+\left(A\circ B-\frac{1}{3}(A, B)E\right)^{\sim}$$

(命題2.28，定理3.2) で定義する.

補題3.28　$A, B\in\mathfrak{J}^C$ に対し

$$(A\vee B)X=\frac{1}{2}(B, X)A+\frac{1}{6}(A, B)X-2B\times(A\times X), \qquad X\in\mathfrak{J}^C$$

が成り立つ.

証明　$X\circ(X\times X)=(\det X)E$, $X\in\mathfrak{J}^C$ (補題2.1) すなわち

$$X\circ(X\circ X)-\mathrm{tr}(X)X\circ X+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(X)^2-(X,X))X=\frac{1}{3}(X,X,X)E$$

において，X の代りに $\lambda A+\mu B+\nu X$ とおいて $\lambda\mu\nu$ の係数を比較すると

$$\begin{aligned}&A\circ(B\circ X)+B\circ(X\circ A)+X\circ(A\circ B)-\mathrm{tr}(A)B\circ X-\mathrm{tr}(B)X\circ A\\&-\mathrm{tr}(X)A\circ B+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)X+\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(X)A+\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(A)\mathrm{B})\\&-\frac{1}{2}((A,B)X+(B,X)A+(X,A)B)\\&\qquad\qquad=(A,B,X)E\end{aligned}$$

を得る．さて

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(B,X)A+\frac{1}{6}(A,B)X-2B\times(A\times X)+\frac{1}{3}(A,B)X\\&=\frac{1}{2}(B,X)A+\frac{1}{2}(A,B)X-2B\circ(A\times X)+\mathrm{tr}(B)A\times X+\mathrm{tr}(A\times X)B\\&\quad-(\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(A\times X)-(B,A\times X))E\\&=\frac{1}{2}(B,X)A+\frac{1}{2}(A,B)X-2B\circ(A\circ X)+\mathrm{tr}(A)B\circ X+\mathrm{tr}(X)B\circ A\\&\quad-\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(X)B+(A,X)B+\mathrm{tr}(B)A\circ X-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(A)X\\&\quad-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(X)A+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(X)E-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B)(A,X)E\\&\quad+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(X)-(A,X))B-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(B)(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(X)-(A,X))E\\&\quad+(A,B,X)E\\&=\mathrm{tr}(A)B\circ X+\mathrm{tr}(B)X\circ A+\mathrm{tr}(X)A\circ B\\&\quad-\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)X+\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(X)A+\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(X)B)\\&\quad+\frac{1}{2}((A,B)X+(B,X)A+(A,X)B)+(A,B,X)E-2B\circ(A\circ X)\\&=A\circ(B\circ X)+B\circ(A\circ X)+X\circ(A\circ B)-2B\circ(A\circ X)\ \text{（初めの公式）}\\&=A\circ(B\circ X)-B\circ(A\circ X)+(A\circ B)\circ X\\&=[\tilde{A},\tilde{B}]X+(A\circ B)^{\sim}X\end{aligned}$$

となる．

補題3.29 (1) $E_i\vee E_j=0$, $i\neq j$.

(2)　$(E_1 \vee E_1)\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & -2\xi_2 & -2x_1 \\ x_2 & -2\overline{x}_1 & -2\xi_3 \end{pmatrix}$.

証明　実際の計算による（定理3.15参照）.

$\phi \in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C)$ に対し，$-{}^t\phi$ をしばしば ϕ' と書く：$(\phi' X, Y) = -(X, \phi Y)$，$X, Y \in \mathfrak{J}^C$.

補題3.30　(1)　$\phi \in \mathfrak{e}_6{}^C$ に対し

$$\phi(X \times Y) = \phi' X \times Y + X \times \phi' Y, \qquad X, Y \in \mathfrak{J}^C$$

が成り立つ.

(2)　$(A \vee B)' = -B \vee A$,　　$A, B \in \mathfrak{J}^C$.

証明　(1) は明らかである（命題2.11）.

(3)　$(A \vee B)' = \left([\widetilde{A}, \widetilde{B}] + \left(A \circ B - \dfrac{1}{3}(A, B)E\right)^{\sim}\right)'$

$= [\widetilde{A}, \widetilde{B}] - \left(A \circ B - \dfrac{1}{3}(A, B)E\right)^{\sim}$ (補題3.3) $= -B \vee A$.

補題3.31　(1)　$\phi \in \mathfrak{e}_6{}^C$，$A, B \in \mathfrak{J}^C$ に対し

$$[\phi, A \vee B] = \phi A \vee B + A \vee \phi' B$$

が成り立つ.

(2)　$\mathfrak{e}_6{}^C$ の元 ϕ は $\phi = \sum_i A_i \vee B_i$，$A_i, B_i \in \mathfrak{J}^C$ と表される.

証明　(1)　$[\phi, A \vee B]X = \phi(A \vee B)X - (A \vee B)\phi X$

$= \phi\left(\dfrac{1}{2}(B, X)A + \dfrac{1}{6}(A, B)X - 2B \times (A \times X)\right) - (A \vee B)\phi X$ (補題3.28)

$= \dfrac{1}{2}(B, X)\phi A + \dfrac{1}{6}(A, B)\phi X - 2\phi' B \times (A \times X) - 2B \times (\phi A \times X)$

$\quad - 2B \times (A \times \phi X) - \dfrac{1}{2}(B, \phi X)A - \dfrac{1}{6}(A, B)\phi X + 2B \times (A \times \phi X)$

(補題3.30)

$= \dfrac{1}{2}(B, X)\phi A + \dfrac{1}{6}(\phi A, B)X - 2B \times (\phi A \times X)$

$$+\frac{1}{2}(\phi' B, X)A+\frac{1}{6}(A, \phi' B)X-2\phi' B\times(A\times X)$$

$=(\phi A\vee B)X+(A\vee\phi' B)X,\quad X\in\mathfrak{J}^C$.

(2)　$\mathfrak{a}=\{\sum_i A_i\vee B_i\,|\,A_i, B_i\in\mathfrak{J}^C\}$ は $\mathfrak{e}_6{}^C$ の ideal である（上記(1)）. $\mathfrak{e}_6{}^C$ は単純である（定理3.26）から $\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_6{}^C$ である.

10　$\mathfrak{e}_6{}^C$ の Killing 形式

定義　$\mathfrak{e}_6{}^C$ に内積 $(\phi_1, \phi_2)_6$ を

$$(\delta_1+\tilde{T}_1, \delta_2+\tilde{T}_2)_6=(\delta_1, \delta_2)_4+(T_1, T_2)$$

$(\phi_i=\delta_i+\tilde{T}_i,\quad \delta_i\in\mathfrak{f}_4{}^C, T_i\in\mathfrak{J}_0{}^C)$ で定義する.

補題3.32　(1)　$\mathfrak{e}_6{}^C$ の内積 $(\phi_1, \phi_2)_6$ は $\mathfrak{e}_6{}^C$-不変である：

$$([\phi, \phi_1], \phi_2)_6+(\phi_1, [\phi, \phi_2])_6=0,\qquad \phi, \phi_i\in\mathfrak{e}_6{}^C.$$

(2)　$\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$，$A, B\in\mathfrak{J}_0{}^C$ に対し

$$(\phi, A\vee B)_6=(\phi A, B)$$

が成り立つ.

証明　(1)　$([\phi, \phi_1], \phi_2)_6$

$=([\delta+\tilde{T}, \delta_1+\tilde{T}_1], \delta_2+\tilde{T}_2)_6\qquad \delta, \delta_i\in\mathfrak{f}_4{}^C,\quad T, T_i\in\mathfrak{J}_0{}^C$

$=(([\delta, \delta_1]+[\tilde{T}, \tilde{T}_1])+(\widetilde{\delta T_1}-\widetilde{\delta_1 T}), \delta_2+\tilde{T}_2)_6$（補題3.25）

$=([\delta, \delta_1], \delta_2)_4+([\tilde{T}, \tilde{T}_1], \delta_2)_4+(\delta T_1-\delta_1 T, T_2)$

$=-(\delta_1, [\delta, \delta_2])_4+(\delta_2 T, T_1)+(\delta T_1, T_2)-(\delta_1 T, T_2)$（補題2.35）

$=-(\delta_1, [\delta, \delta_2])_4-(\delta_1 T, T_2)-(T_1, \delta T_2)+(T_1, \delta_2 T)$

$=-(\delta_1+\tilde{T}_1, ([\delta, \delta_2]+[\tilde{T}, \tilde{T}_2])+(\widetilde{\delta T_2}-\widetilde{\delta_2 T}))_6$

$=-(\delta_1+\tilde{T}_1, [\delta+\tilde{T}, \delta_2+\tilde{T}_2])_6=-(\phi_1, [\phi, \phi_2])_6$.

(2)　$(\phi, A\vee B)_6=\left(\delta+\tilde{T}, [\tilde{A}, \tilde{B}]+\left(A\circ B-\frac{1}{3}(A, B)E\right)^{\sim}\right)_6$

$$=(\delta, [\tilde{A}, \tilde{B}])_4+\left(T, A\circ B-\frac{1}{3}(A, B)E\right)$$

$$=(\delta A, B)+(\tilde{T}A, B)=((\delta+\tilde{T})A, B)=(\phi A, B)$$

$(\phi=\delta+\tilde{T},\quad \delta\in\mathfrak{f}_4{}^C, T\in\mathfrak{J}_0{}^C)$ である.

補題3.33 $\mathfrak{e}_6{}^C$ において

$$[\tilde{E}_i-\tilde{E}_{i+1}, D]=0, \quad D\in\mathfrak{d}_4{}^C, \quad [\tilde{E}_i-\tilde{E}_{i+1}, \tilde{E}_j-\tilde{E}_{j+1}]=0,$$

$$[\tilde{E}_i-\tilde{E}_{i+1}, \tilde{A}_i(a)]=-\tilde{F}_i(a), \quad [\tilde{E}_i-\tilde{E}_{i+1}, \tilde{F}_i(a)]=-\frac{1}{4}\tilde{A}_i(a),$$

$$[\tilde{E}_i-\tilde{E}_{i+1}, \tilde{A}_{i+1}(a)]=-\tilde{F}_{i+1}(a), \quad [\tilde{E}_i-\tilde{E}_{i+1}, \tilde{F}_{i+1}(a)]=-\frac{1}{4}\tilde{A}_{i+1}(a),$$

$$[\tilde{E}_i-\tilde{E}_{i+1}, \tilde{A}_{i+2}(a)]=2\tilde{F}_{i+2}(a), \quad [\tilde{E}_i-\tilde{E}_{i+1}, \tilde{F}_{i+2}(a)]=\frac{1}{2}\tilde{A}_{i+2}(a),$$

が成り立つ.

定理3.34 $\mathfrak{e}_6{}^C$ の Killing 形式 B_6 は

$$\begin{aligned} B_6(\phi_1, \phi_2) &= 12(\phi_1, \phi_2)_6 \\ &= 12(\delta_1, \delta_2)_4+12(T_1, T_2)=\frac{4}{3}B_4(\delta_1, \delta_2)+12(T_1, T_2) \\ &= 4\operatorname{tr}(\phi_1\phi_2) \end{aligned}$$

($\phi_i=\delta_i+\tilde{T}_i$, $\delta\in\mathfrak{f}_4{}^C$, $T_i\in\mathfrak{J}_0{}^C$) で与えられる.

証明 $\mathfrak{e}_6{}^C$ は単純である（定理3.26）から, $\kappa, \kappa'\in C$ が存在して

$$B_6(\phi_1, \phi_2)=\kappa(\phi_1, \phi_2)_6=\kappa\operatorname{tr}(\phi_1\phi_2), \qquad \phi_i\in\mathfrak{e}_6{}^C$$

となる(補題3.32, [3]命題12.3). κ, κ' を求めるために $\phi_1=\phi_2=\tilde{E}_1-\tilde{E}_2$ とおく.

$$(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, \tilde{E}_1-\tilde{E}_2)_6=(E_1-E_2, E_1-E_2)=2$$

となる. 一方

$$[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, [\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, \tilde{A}_1(e_i)]]=[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, -F_1(e_i)]=\frac{1}{4}\tilde{A}_1(e_i),$$

$$[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, [\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, \tilde{A}_2(e_i)]]=[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, -F_2(e_i)]=\frac{1}{4}\tilde{A}_2(e_i),$$

$$[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, [\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, \tilde{A}_3(e_i)]]=[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, 2\tilde{F}_3(e_i)]=\tilde{A}_3(e_i),$$

$$[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, [\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, \tilde{F}_1(e_i)]]=\left[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, -\frac{1}{4}\tilde{A}_1(e_i)\right]=\frac{1}{4}\tilde{F}_1(e_i),$$

$$[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, [\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, \tilde{F}_2(e_i)]]=\left[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, -\frac{1}{4}\tilde{A}_i(e_i)\right]=\frac{1}{4}\tilde{F}_2(e_i),$$

$$[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, [\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, \tilde{F}_3(e_i)]]=\left[\tilde{E}_1-\tilde{E}_2, \frac{1}{2}\tilde{A}_3(e_i)\right]=F_3(e_i),$$

（その他 $=0$）の計算より

$$B_6(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2,\ \tilde{E}_1-\tilde{E}_2)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1\right)\times 8\times 2=24$$

となる．よって $\kappa=12$ である．つぎに

$$(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)E_1=E_1,\quad (\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)E_2=E_2,$$

$$(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)E_3=0,\quad (\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)F_1(e_i)=\frac{1}{4}F_1(e_i),$$

$$(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)F_2(e_i)=\frac{1}{4}F_2(e_i),\quad (\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)F_3(e_i)=0$$

の計算より

$$\mathrm{tr}((\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)^2)=1\times 2+\frac{1}{4}\times 16=6$$

となる．よって $\kappa'=4$ である．

補題3.35　$\mathfrak{e}_6{}^C$ において，次の(1)，(2)が成り立つ．

(1)　$A\vee(B\times C)+B\vee(C\times A)+C\vee(A\times B)=0,\qquad A,B,C\in\mathfrak{J}^C$.

(2)　$0\neq A\in\mathfrak{J}^C$ ならば $A\vee B\neq 0$ となる $B\in\mathfrak{J}^C$ が存在する．

証明　(1)　$(\phi,(A\times A)\vee A)_6=(\phi(A\times A),A)$（補題3.32）

$=2(\phi'A\times A,A)$（補題3.30）$=2(\phi'A,A\times A)$

$=-2(A,\phi(A\times A))=-2(\phi,(A\times A)\vee A)_6\qquad \phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$

より $(\phi,(A\times A)\vee A)_6=0$ となる．これがすべての $\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$ で成り立つので $(A\times A)\vee A=0$ より $A\vee(A\times A)=0$ を得る（補題3.30）．A の代りに $\lambda A+\mu B+\nu C$ とおいて $\lambda\mu\nu$ の係数を比較すると (1) を得る．

(2)　すべての $B\in\mathfrak{J}^C$ に対して $A\vee B=0$，すなわち $B\vee A=0$ であるとすると，任意の $\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$ に対し $0=(\phi,B\vee A)=(\phi B,A)$（補題3.32）となる．$\mathfrak{e}_6{}^C\mathfrak{J}^C=\mathfrak{J}^C$（定理3.27）より $(\mathfrak{J}^C,A)=0$ となり，$A=0$ を得る．

11　$\mathfrak{e}_6{}^C$ の root 系

$$\mathfrak{M}^r=\{X\in M(3,\mathfrak{C})\mid X \text{ の対角線の元はすべて実数}\}$$

とおき，$(\mathfrak{M}^r)^C$ をその複素化とする．$(\mathfrak{M}^r)^C$ において，積 $X\circ Y$ を

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+Y^*X^*)$$

で定義する．$\delta=(\delta_1,\delta_2,\delta_3)\in\mathfrak{d}_4{}^C$（$(\delta_1x)y+x(\delta_2y)=\overline{\delta_3(\overline{xy})}$，$x,y\in\mathfrak{C}^C$）に対

し，C-線型写像 $\delta:(\mathfrak{M}^r)^C\to(\mathfrak{M}^r)^C$ を

$$\delta\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & \xi_2 & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \delta_3x_{12} & \overline{\delta_2\overline{x}_{13}}\\ \overline{\delta_3\overline{x}_{21}} & 0 & \delta_1x_{23}\\ \delta_2x_{31} & \overline{\delta_1\overline{x}_{32}} & 0\end{pmatrix}$$

で定義する．（この δ は $\delta:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ の拡張になっている）．

補題3.36　$\delta\in\mathfrak{d}_4{}^C$ に対し

$$\delta(X\circ Y)=\delta X\circ Y+X\circ\delta Y,\qquad X,\ Y\in(\mathfrak{M}^r)^C$$

が成り立つ．

証明

$$\sigma_{23}=\delta_1,\qquad \sigma_{31}=\delta_2,\qquad \sigma_{12}=\delta_3$$
$$\sigma_{32}=\kappa\delta_1,\qquad \sigma_{13}=\kappa\delta_2,\qquad \sigma_{21}=\kappa\delta_3$$

の記号を用いる．

$\delta X\circ Y+X\circ\delta Y$ の (i,i)-元（この値は C にある）

$$=\mathrm{R}\Big(\sum_{k=1}^{3}((\sigma_{ik}x_{ik})y_{ki}+\overline{y}_{ki}\overline{(\sigma_{ki}x_{ki})})+\sum_{k=1}^{3}x_{ik}(\sigma_{ki}y_{ki})+\overline{(\sigma_{ki}y_{ki})}\,\overline{x}_{ik})\Big)$$

$$=2\,\mathrm{R}\Big(\sum_k((\sigma_{ik}x_{ik})y_{ki}+x_{ik}(\sigma_{ki}y_{ki}))\Big)$$

$$=2\sum_k((\sigma_{ik}x_{ik},\ \overline{y}_{ki})+(x_{ik},\ \overline{\sigma_{ki}y_{ki}}))$$

$$=2\sum_k((x_{ik},\ -\sigma_{ik}\overline{y}_{ki})+(x_{ik},\ \sigma_{ik}\overline{y}_{ki}))=0$$

$\delta X\circ Y+X\circ\delta Y$ の (i,j)-元　$(i\neq j)$

$$=\sum_{k=1}^{3}((\sigma_{ik}x_{ik})y_{kj}+\overline{y}_{ki}\overline{(\sigma_{jk}x_{jk})})+\sum_{k=1}^{3}(x_{ik}(\sigma_{kj}x_{kj})+\overline{(\sigma_{ki}y_{ki})}\,\overline{x}_{jk})$$

$$=\sum_k((\sigma_{ik}x_{ik})y_{kj}+x_{ik}(\sigma_{kj}x_{kj}))+\overline{\sum_k((\sigma_{jk}x_{jk})y_{ki}+x_{jk}(\sigma_{ki}y_{ki}))}$$

$(i,j,k$ が皆異なると，3 対原理より

$$(\sigma_{ik}x_{ik})y_{kj}+x_{ik}(\sigma_{kj}x_{kj})=\sigma_{ij}(x_{ik}y_{kj})$$

が成り立つが，$i=k\neq j$ また $i\neq k=j$ のときでも，$\sigma_{ll}=0$ とすると，$x_{ll}\in C$ より，上式が成り立っている）

$$=\sum_k\sigma_{ij}(x_{ik}y_{kj})+\sum_k\overline{\sigma_{ji}(x_{jk}y_{ki})}$$

$$=\sum_k\sigma_{ij}(x_{ik}y_{kj})+\sum_k\sigma_{ij}(\overline{x_{jk}y_{ki}})=\delta(X\circ Y)\ \text{の}\ (i,j)\text{-元}$$

となる．

$T\in M(3,\mathfrak{C})^C$ に対し，C-線型写像 $\tilde{T}:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ を

$$\widetilde{T}X=\frac{1}{2}(TX+XT^*)$$

で定義する．$M(3,\mathfrak{C})_0{}^C=\{T\in M(3,\mathfrak{C})^C\,|\,\mathrm{tr}(T)=0\}$ の記号を用いる．

補題3.37 $T\in M(3,\mathfrak{C})_0{}^C$ ならば $\widetilde{T}\in\mathfrak{e}_6{}^C$ である．

証明 $T=T_1+T_2$, $T_1=\dfrac{T+T^*}{2}$, $T_2=\dfrac{T-T^*}{2}$ と分解する．このとき $\widetilde{T}_1\in\mathfrak{e}_6{}^C$ (命題2.28), $\widetilde{T}_2\in\mathfrak{f}_4{}^C$ (命題2.16) $\subset\mathfrak{e}_6{}^C$ より，$\widetilde{T}=\widetilde{T}_1+\widetilde{T}_2\in\mathfrak{e}_6{}^C$ である．

補題3.38 (1) $\delta\in\mathfrak{d}_4{}^C$, $R\in(\mathfrak{M}^r)^C$, $\mathrm{tr}(R)=0$ に対し

$$[\delta,\widetilde{R}]=\widetilde{\delta R}$$

が成り立つ．

(2) $H\in M(3,C)$, $\mathrm{tr}(H)=0$, $T\in M(3,\mathfrak{C})_0{}^C$ に対して

$$[\widetilde{H},\widetilde{T}]=\frac{1}{2}[H,T]^\sim$$

が成り立つ．

証明 (1) $(\widetilde{\delta R})X=\delta R\circ X=\delta(R\circ X)-R\circ\delta X$ (補題3.36) $=\delta(\widetilde{R}X)-\widetilde{R}(\delta X)=[\delta,\widetilde{R}]X$, $X\in\mathfrak{J}^C$ より $\widetilde{\delta R}=[\delta,\widetilde{R}]$ を得る．

(2) $[\widetilde{H},\widetilde{T}]X=\widetilde{H}\widetilde{T}X-\widetilde{T}\widetilde{H}X$

$$=\frac{1}{2}(\widetilde{H}(TX+XT^*)-\widetilde{T}(HX+XH^*))$$

$$=\frac{1}{4}(HTX+XT^*H^*+HXT^*+TXH^*-THX-XH^*T^*-TXH^*-HXT^*)$$

($H\in M(3,C)$ であるから，積の結合法則が成り立つ)

$$=\frac{1}{4}([H,T]X+X[H,T]^*)=\frac{1}{2}[H,T]^\sim X,\quad X\in\mathfrak{J}^C.$$

定理3.39 C-Lie 環 $\mathfrak{e}_6{}^C$ の階数は 6 である．$\mathfrak{e}_6{}^C$ の(ある Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に関する) root 系は

$$\pm(\lambda_k-\lambda_l),\quad \pm(\lambda_k+\lambda_l),\qquad 0\leqq k<l\leqq 3,$$

$$\pm\lambda_k\pm\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3),\qquad 0\leqq k\leqq 3,$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),\quad \pm\frac{1}{2}(\ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),\quad \pm\frac{1}{2}(\ \lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\ \lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),$$

$(\mu_1+\mu_2+\mu_3=0)$ である．

証明
$$\mathfrak{e}_6{}^C=\mathfrak{f}_4{}^C\oplus\tilde{\mathfrak{J}}_0{}^C$$
の分解（定理3.2）を用いる．

$$\mathfrak{h}=\left\{ h=h_\delta+\tilde{H}\in\mathfrak{e}_6{}^C \;\middle|\; \begin{array}{l} h_\delta=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k=-\sum_{k=0}^{3}\lambda_k iG_{k\,4+k},\ \lambda_k\in C \\ H=\sum_{j=1}^{3}\mu_j E_j,\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=0,\ \mu_j\in C \end{array}\right\}$$

は $\mathfrak{e}_6{}^C$ の可換な部分 Lie 環である．実際，

$$[h_\delta, h_\delta']=0,$$
$$[h_\delta, \tilde{H}']=\widetilde{h_\delta H'}\ (\text{補題}3.38)=\tilde{0}=0,$$
$$[\tilde{H}, \tilde{H}']=\frac{1}{2}[H, H']^{\sim}\ (\text{補題}3.38)=0$$

である．（$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{e}_6{}^C$ の Cartan 部分環になるものである）．

I　$\mathfrak{d}_4{}^C$ $(\subset\mathfrak{f}_4{}^C\subset\mathfrak{e}_6{}^C)$ の root $\pm(\lambda_k-\lambda_l)$, $\pm(\lambda_k+\lambda_l)$, $0\leqq k<l\leqq 3$ は $\mathfrak{e}_6{}^C$ の root である．実際，α を $\mathfrak{d}_4{}^C$ の root，$S\in\mathfrak{d}_4{}^C\subset\mathfrak{e}_6{}^C$ をその root ベクトルとするとき

$$[h, S]=[h_\delta+\tilde{H}, S]=[h_\delta, S]-[S, \tilde{H}]$$
$$=\alpha(h_\delta)S-\widetilde{SH}\ (\text{補題}3.38)=\alpha(h_\delta)S$$

となるからである．

II　$aE_{ij}\in M(3,\mathfrak{C})^C$ を $F_{ij}(a)$ で表す．例えば $F_{23}(a)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$ である．

このとき

$$[h, \tilde{F}_{23}(a)]=[h_\delta, \tilde{F}_{23}(a)]+[\tilde{H}, \tilde{F}_{23}(a)],\quad a=e_k+ie_{4+k}$$
$$=h_\delta\tilde{F}_{23}(a)+\frac{1}{2}[H, F_{23}(a)]^{\sim}\ (\text{補題}3.38)$$
$$=\tilde{F}_{23}(h_\delta a)+\frac{1}{2}[H, F_{23}(a)]^{\sim}$$

(しかるに, $h_\delta a = h_\delta(e_k + ie_{4+k}) = \lambda_k(e_k + ie_{4+k}) = \lambda_k a$, $[H, F_{23}(a)] = HF_{23}(a) - F_{23}(a)H = (\mu_2 - \mu_3)F_{23}(a)$ であるから)

$$= \left(\lambda_k + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3)\right)\widetilde{F}_{23}(a)$$

となり, $\lambda_k + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3)$ が root であり, $\widetilde{F}_{23}(e_k + ie_{4+k})$ がその root ベクトルであることが分かる. 同様に $-\lambda_k + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3)$ も root であり, $\widetilde{F}_{23}(e_k - ie_{4+k})$ はその root ベクトルである.

$$[h, \widetilde{F}_{32}(a)] = \left(-\lambda_k + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_2)\right)\widetilde{F}_{32}(a), \quad a = e_k + ie_{4+k}$$

より, $-\lambda_k + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_2)$ は root である. 同様に $\lambda_k + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_2)$ も root であり, $\widetilde{F}_{32}(e_k - ie_{4+k})$ はその root ベクトルである. 次に

$$[h, \widetilde{F}_{31}(a)] = \widetilde{h_\delta F_{31}}(a) + \frac{1}{2}[\widetilde{H}, \widetilde{F}_{31}(a)]$$

$$= \widetilde{F}_{31}((\nu h_\delta)a) + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1)\widetilde{F}_{31}(a),$$

$$[h, \widetilde{F}_{12}(a)] = \widetilde{F}_{12}((\kappa\pi h_\delta)a) + \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)\widetilde{F}_{12}(a),$$

ここに

$$\nu h_\delta = \frac{1}{2}(-\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)H_0 + \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)H_1 + \frac{1}{2}(-\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)H_2 + \frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)H_3,$$

$$\kappa\pi h_\delta = \frac{1}{2}(-\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)H_0 + \frac{1}{2}(-\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)H_1 + \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)H_2 + \frac{1}{2}(-\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)H_3$$

等の計算から, 残りの root も求められる.

定理3.40 $\mathfrak{e}_6{}^C$ の root 系 (定理3.39) において

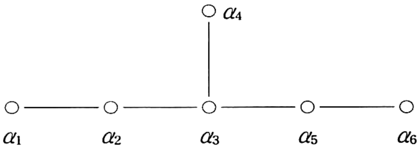
$$\alpha_1 = \lambda_0 - \lambda_1, \quad \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_3 = \lambda_2 - \lambda_3,$$

$$\alpha_4 = \lambda_3 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3),$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(-\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1),$$

$$\alpha_6=\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)$$

は基本 root 系であり，$\mathfrak{e}_6{}^C$ の Dynkin 図形は



となる．

証明　以下 root $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_6\alpha_6$ を略して $n_1n_2\cdots n_6$ で表すことにする．

$\lambda_0-\lambda_1=$	1	0	0	0	0	0	$\lambda_0+\lambda_1=$	1	2	2	1	1	1
$\lambda_0-\lambda_2=$	1	1	0	0	0	0	$\lambda_0+\lambda_2=$	1	1	2	1	1	1
$\lambda_0-\lambda_3=$	1	1	1	0	0	0	$\lambda_0+\lambda_3=$	1	1	1	1	1	1
$\lambda_1-\lambda_2=$	0	1	0	0	0	0	$\lambda_1+\lambda_2=$	0	1	2	1	1	1
$\lambda_1-\lambda_3=$	0	1	1	0	0	0	$\lambda_1+\lambda_3=$	0	1	1	1	1	1
$\lambda_2-\lambda_3=$	0	0	1	0	0	0	$\lambda_2+\lambda_3=$	0	0	1	1	1	1

$\lambda_0+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	1	1	1	1	0	0
$\lambda_1+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	1	1	1	0	0
$\lambda_2+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	0	1	1	0	0
$\lambda_3+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	0	0	1	0	0
$\lambda_0-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	1	1	1	0	1	1
$\lambda_1-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	1	1	0	1	1
$\lambda_2-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	0	1	0	1	1
$\lambda_3-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=$	0	0	1	0	1	0
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=$	1	2	3	1	2	1

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 2\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0$$

と表せるから $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ は基本 root 系である．$h=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k+\sum_{j=1}^{3}\mu_j\widetilde{E}_j$，$h'=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k' H_k+\sum_{j=1}^{3}\mu_j'\widetilde{E}_j\in\mathfrak{h}$ に対し，Killing 形式 B_6 の値は

$$B_6(h, h')=12\left(2\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k'+\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mu_j'\right)$$

となる．実際，定理3.34より

$$B_6(h, h')=\frac{4}{3}B_4\left(\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k, \sum_{k=0}^{3}\lambda_k' H_k\right)+12\left(\sum_{j=1}^{3}\mu_j E_j, \sum_{j=1}^{3}\mu_j' E_j\right)$$

$$=\frac{4}{3}18\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k' \ (\text{定理}2.39)\ +12\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mu_j'$$

$$=12\left(2\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k'+\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mu_j'\right)$$

である．これより，root $\alpha_1,\cdots,\alpha_6$ に対応する元 $H_{\alpha_1},\cdots,H_{\alpha_6}\in\mathfrak{h}$ ($B_6(H_\alpha,H)=\alpha(H)$, $H\in\mathfrak{h}$) は

$$H_{\alpha_1}=\frac{1}{24}(H_0-H_1),\quad H_{\alpha_2}=\frac{1}{24}(H_1-H_2),\quad H_{\alpha_3}=\frac{1}{24}(H_2-H_3),$$

$$H_{\alpha_4}=\frac{1}{24}(H_3+(\widetilde{E}_2-\widetilde{E}_3)),$$

$$H_{\alpha_5}=\frac{1}{48}((-H_0-H_1-H_2+H_3)+2(\widetilde{E}_2-\widetilde{E}_3)),$$

$$H_{\alpha_6}=\frac{1}{48}((H_0+H_1+H_2+H_3)+2(\widetilde{E}_1-\widetilde{E}_2))$$

となる．よって

$$(\alpha_1,\alpha_1)=B_6(H_{\alpha_1},H_{\alpha_1})=24\frac{1}{24}\frac{1}{24}2=\frac{1}{12}$$

となる．同様にして

$$(\alpha_i,\alpha_i)=\frac{1}{12},\quad i=2,3,4,5,6,$$

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_3,\alpha_5)=(\alpha_5,\alpha_6)=-\frac{1}{24},$$

$$(\alpha_i,\alpha_j)=0\quad \text{その他}$$

となる．これより容易に Dynkin 図形を描くことができる．

12　単連結複素 Lie 群 $E_6{}^C$

命題3.41　Lie 環 $\mathfrak{e}_6$ の複素化は $\mathfrak{e}_6{}^C$ である．

証明　$\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$ に対し，ϕ の内積 $\langle X, Y\rangle$ に関する共役転置写像 ϕ^* は $\phi^*=\tau{}^t\phi\tau\in\mathfrak{e}_6{}^C$ であり，$\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$ が $\mathfrak{e}_6$ に属するための必要十分条件は $\phi^*=-\phi$ である．さて，$\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$ は

$$\phi=\frac{\phi-\phi^*}{2}+i\frac{\phi+\phi^*}{2i},\qquad \frac{\phi-\phi^*}{2},\ \frac{\phi+\phi^*}{2i}\in\mathfrak{e}_6$$

と表されるので，$\mathfrak{e}_6{}^C$ は $\mathfrak{e}_6$ の複素化である．

定理3.42　Lie 群 $E_6{}^C$ の極分解は

$$E_6{}^C\simeq E_6\times \boldsymbol{R}^{78}$$

で与えられる．したがって，$E_6{}^C$ は単連結な E_6 型複素 Lie 群である．

証明　$E_6{}^C$ は $\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)=GL(27, C)$ の代数部分群であり，$\alpha\in E_6{}^C$ ならば，α の内積 $\langle X, Y\rangle$ に関する共役転置写像 α^* は $\alpha^*=\tau{}^t\alpha\tau\in E_6{}^C$ である．よって Chevalley の補題（[3]定理6.3）より

$$E_6{}^C\simeq(E_6{}^C\cap U(\mathfrak{J}^C))\times\boldsymbol{R}^d=E_6\times\boldsymbol{R}^d,\quad d=78$$

となる．E_6 は単連結である（定理3.10）から，$E_6{}^C$ も単連結である．$E_6{}^C$ の Lie 環は $\mathfrak{e}_6{}^C$ であるから，結局，$E_6{}^C$ は単連結 E_6 型複素 Lie 群であることが分かった．

付録13　$\boldsymbol{E_6}$ の位数 3 の自己同型写像 $\boldsymbol{w}$ と部分群 $(\boldsymbol{SU(3)}\times\boldsymbol{SU(3)}\times\boldsymbol{SU(3)})/\boldsymbol{Z_3}$

$w\in G_2$ を $w\in G_2\subset F_4\subset E_6$ とみなし，E_6 の部分群

$$(E_6)^w=\{\alpha\in E_6\,|\,w\alpha=\alpha w\}$$

を調べよう．

F_4, **13** の同一視 $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C})\oplus M(3, \boldsymbol{C})$ の複素化 $\mathfrak{J}^C=\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C})^C\oplus M(3, \boldsymbol{C})^C$ を用いる．

定理3.43　$(E_6)^w\cong(SU(3)\times SU(3)\times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3$，$\boldsymbol{Z}_3=\{(E, E, E), (\omega E, \omega E, \omega E), (\omega^2E, \omega^2E, \omega^2E)\}$，$1\neq\omega\in\boldsymbol{C}$，$\omega^3=1$．

証明　写像 φ : $SU(3)\times SU(3)\times SU(3)\to(E_6)^w$ を

$$\varphi(P, Q, R)(A+M)=f(Q, R)Af(Q, R)^*+PM\tau f(Q, R)^*,$$
$$A+M\in\mathfrak{J}(3, \boldsymbol{C})^C\oplus M(3, \boldsymbol{C})^C=\mathfrak{J}^C$$

で定義する．ここに

$$f(Q, R)=\iota Q+\overline{\iota}R,\qquad \iota=\frac{1+ie}{2}$$

とする．このとき φ は全射群準同型写像であって $\mathrm{Ker}\,\varphi=\boldsymbol{Z}_3$ である．よって定理を得る．

付録14　非 compact E_6 型例外 Lie 群 $\boldsymbol{E}_{6(6)}$，$\boldsymbol{E}_{6(2)}$，$\boldsymbol{E}_{6(-14)}$，$\boldsymbol{E}_{6(-26)}$

$\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})^C$ に Hermite 内積 $\langle X, Y\rangle_\gamma$，$\langle X, Y\rangle_\sigma$ を

$$\langle X, Y\rangle_\gamma=\langle \gamma X, Y\rangle,\quad \langle X, Y\rangle_\sigma=\langle \sigma X, Y\rangle$$

で定義する．さて，群 $E_{6(6)}$，$E_{6(2)}$，$E_{6(-14)}$，$E_{6(-26)}$ を

$$E_{6(6)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C}'))\,|\,\det \alpha X=\det X\},$$
$$E_{6(2)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})^C)\,|\,\det \alpha X=\det X, \langle \alpha X, \alpha Y\rangle_\gamma=\langle X, Y\rangle_\gamma\},$$
$$E_{6(-14)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})^C)\,|\,\det \alpha X=\det X, \langle \alpha X, \alpha Y\rangle_\sigma=\langle X, Y\rangle_\sigma\},$$
$$E_{6(-26)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C}))\,|\,\det \alpha X=\det X\}$$

で定義する．これらの群は

$$E_{6(6)}\cong(E_6{}^C)^{\tau\gamma},\quad E_{6(2)}=(E_6{}^C)^{\tau\lambda\gamma},\quad E_{6(-14)}=(E_6{}^C)^{\tau\lambda\sigma},\quad E_{6(-26)}=(E_6{}^C)^{\tau}$$

で定義してもよい．

定理3.44　Lie 群 $E_{6(6)}$，$E_{6(2)}$，$E_{6(-14)}$，$E_{6(-26)}$ の極分解はそれぞれ

$$E_{6(6)}\simeq Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{42},$$
$$E_{6(2)}\simeq (Sp(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{40},$$
$$E_{6(-14)}\simeq (U(1)\times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4\times \boldsymbol{R}^{32},$$
$$E_{6(-26)}\simeq F_4\times \boldsymbol{R}^{26}$$

で与えられる．

証明　それぞれ定理3.24，定理3.21，定理3.17，定理3.5に対応する事実である．

定理3.45　中心は $z(E_{6(6)})=\{1\}$，$z(E_{6(2)})=\boldsymbol{Z}_3$，$z(E_{6(-14)})=\boldsymbol{Z}_3$，$z(E_{6(-26)})=\{1\}$ である．

IV. 例外型単純 Lie 群 E_7

1 Freudenthal ベクトル空間 $\mathfrak{P}^C$

Freudenthal C-ベクトル空間とよばれる56-次元 C-ベクトル空間 $\mathfrak{P}^C$ を

$$\mathfrak{P}^C = \mathfrak{J}^C \oplus \mathfrak{J}^C \oplus C \oplus C$$

で定義する．$\mathfrak{P}^C$ の元 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を (X, Y, ξ, η) で表したり，ときには $\dot{X} + \underset{\cdot}{Y} + \dot{\xi} + \underset{\cdot}{\eta}$ で表すこともある．$\mathfrak{P}^C$ に**内積** (P, Q)，**Hermite 内積** $\langle P, Q\rangle$，**交代内積** $\{P, Q\}$ をそれぞれ

$$(P, Q) = (X, Z) + (Y, W) + \xi\zeta + \eta\omega,$$
$$\langle P, Q\rangle = \langle X, Z\rangle + \langle Y, W\rangle + (\tau\xi)\zeta + (\tau\eta)\omega,$$
$$\{P, Q\} = (X, W) - (Z, Y) + \xi\omega - \zeta\eta$$

$(P = (X, Y, \xi, \eta),\ \ Q = (Z, W, \zeta, \omega) \in \mathfrak{P}^C)$ で定義する．

$\phi \in \mathfrak{e}_6{}^C$，$A, B \in \mathfrak{J}^C$，$\nu \in C$ に対し，C-線型写像 $\Phi(\phi, A, B, \nu) : \mathfrak{P}^C \to \mathfrak{P}^C$ を

$$\Phi(\phi, A, B, \nu)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi - \frac{1}{3}\nu & 2B & 0 & A \\ 2A & \phi' + \frac{1}{3}\nu & B & 0 \\ 0 & A & \nu & 0 \\ B & 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \phi X - \frac{1}{3}\nu X + 2B \times Y + \eta A \\ 2A \times X + \phi' Y + \frac{1}{3}\nu Y + \xi B \\ (A, Y) + \nu\xi \\ (B, X) - \nu\eta \end{pmatrix}$$

$(\phi' = -{}^t\phi)$ で定義する．

定義　$P=(X, Y, \xi, \eta)$, $Q=(Z, W, \zeta, \omega)\in\mathfrak{P}^C$ に対し，C-線型写像 $P\times Q:\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を

$$P\times Q=\Phi(\phi, A, B, \nu),\quad \begin{cases}\phi=-\dfrac{1}{2}(X\vee W+Z\vee Y)\\ A=-\dfrac{1}{4}(2Y\times W-\xi Z-\zeta X)\\ B=\dfrac{1}{4}(2X\times Z-\eta W-\omega Y)\\ \nu=\dfrac{1}{8}((X, W)+(Z, Y)-3(\xi\omega+\zeta\eta))\end{cases}$$

で定義する．

補題4.1　$P, Q, R\in\mathfrak{P}^C$ に対し

(1)　$P\times Q=Q\times P$

(2)　$(P\times Q)P-(P\times P)Q+\dfrac{3}{8}\{P, Q\}P=0$

(3)　$(P\times R)Q-(Q\times R)P+\dfrac{1}{8}\{Q, R\}P-\dfrac{1}{8}\{P, R\}Q-\dfrac{1}{4}\{P, Q\}R=0$

が成り立つ．

証明　(1) は明らかである．

(2)　$(P\times Q)P$　　$P=(X, Y, \xi, \eta)$, $Q=(Z, W, \zeta, \omega)$

$$=\Phi\Big(-\frac{1}{2}(X\vee W+Z\vee Y),\ -\frac{1}{4}(2Y\times W-\xi Z-\zeta X), \frac{1}{4}(2X\times Z-\eta W$$

$$-\omega Y), \frac{1}{8}((X, W)+(Z, Y)-3(\xi\omega+\zeta\eta))\Big)(X, Y, \xi, \eta)$$

$=\cdots$($X\vee Y$ の公式（補題3.28）等を用いる）$\cdots$

$$=\Phi\Big(-X\vee Y, -\frac{1}{2}(Y\times Y-\xi X), \frac{1}{2}(X\times X-\eta Y), \frac{1}{4}((X, Y)-3\xi\eta)\Big)$$

$$\times(Z, W, \zeta, \omega)-\frac{3}{8}((X, W)-(Z, Y)+\xi\omega-\zeta\eta)(X, Y, \xi, \eta)$$

$$=(P\times P)Q-\frac{3}{8}\{P, Q\}P.$$

(3)　(2) において P の代わりに $P+R$ とおくと

$$2(P\times R)Q-(P\times Q)R-(R\times Q)P+\frac{3}{8}\{Q, R\}P-\frac{3}{8}\{P, Q\}R=0$$

を得る．P と Q をいれかえると

$$2(Q\times R)P-(Q\times P)R-(R\times P)Q+\frac{3}{8}\{P,R\}Q-\frac{3}{8}\{Q,P\}R=0$$

となる．この 2 式を引いて 3 で割ると (3) の求める式を得る．

Freudenthal 複素多様体とよばれる空間 $\mathfrak{M}^C$ を

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^C&=\{P\in\mathfrak{P}^C\mid P\times P=0,\ \ P\neq 0\}\\&=\left\{\begin{matrix}P=(X,Y,\xi,\eta)\in\mathfrak{P}^C\\ P\neq 0\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}X\vee Y=0,\ X\times X=\eta Y\\ Y\times Y=\xi X,\ (X,Y)=3\xi\eta\end{matrix}\right\}\end{aligned}$$

で定義する．

補題4.2　$\mathfrak{P}^C$ の次の形の元（ただし $\xi\neq 0,\eta\neq 0$）

$$\begin{pmatrix}X\\ \dfrac{1}{\eta}X\times X\\ \dfrac{1}{\eta^2}\det X\\ \eta\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\xi}Y\times Y\\ Y\\ \xi\\ \dfrac{1}{\xi^2}\det Y\end{pmatrix},\quad \dot{1}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \underset{\cdot}{1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{M}^C$ の元である．

証明　$X\vee(X\times X)=0$（補題3.35），$(X\times X)\times(X\times X)=(\det X)X$（補題2.1）を用いて容易に確かめられる．

2　compact 例外群 E_7

定義　群 $E_7{}^C$，E_7 をそれぞれ

$$E_7{}^C=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\mid\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q\},$$

$$E_7=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\mid\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q,\langle\alpha P,\alpha Q\rangle=\langle P,Q\rangle\}$$

で定義する．

定理4.3　E_7 は compact Lie 群である．

証明　E_7 はユニタリ群 $U(56)=U(\mathfrak{P}^C)=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\mid\langle\alpha P,\alpha Q\rangle=\langle P,Q\rangle\}$ の閉部分群として compact Lie 群である．

命題4.4　$\alpha \in E_7{}^C$ は（したがって $\alpha \in E_7$ も）

(1)　$\alpha \mathfrak{M}^C = \mathfrak{M}^C$

(2)　$\{\alpha P, \alpha Q\} = \{P, Q\}$，$P, Q \in \mathfrak{P}^C$

を満たす．

証明　(1)　$\alpha \mathfrak{M}^C \subset \mathfrak{M}^C$ を示せばよい．さて，$P \in \mathfrak{M}^C$ ならば $\alpha P \times \alpha P = \alpha(P \times P)\alpha^{-1} = \alpha 0 \alpha^{-1} = 0$，よって $\alpha P \in \mathfrak{M}^C$ である．

(2)
$$\{\alpha P, \alpha Q\}\alpha P = \frac{8}{3}((\alpha P \times \alpha P)\alpha Q - (\alpha P \times \alpha Q)\alpha P)\ \text{（補題4.1）}$$
$$= \frac{8}{3}(\alpha(P \times P)Q - \alpha(P \times Q)P) = \{P, Q\}\alpha P$$

より $\{\alpha P,\ \alpha Q\} = \{P, Q\}$ を得る．

3　E_7 の Lie 環 $\mathfrak{e}_7$

Lie 群 E_7 の Lie 環 $\mathfrak{e}_7$ を調べる前に，群 $E_7{}^C$ の Lie 環 $\mathfrak{e}_7{}^C$ を調べておく．

定理4.5　Lie 群 $E_7{}^C$ の Lie 環 $\mathfrak{e}_7{}^C$ は

$$\mathfrak{e}_7{}^C = \{\, \Phi(\phi, A, B, \nu) \in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{P}^C) \mid \phi \in \mathfrak{e}_6{}^C, A, B \in \mathfrak{J}^C, \nu \in C \}$$

である．$\mathfrak{e}_7{}^C$ における Lie 積 $[\Phi_1, \Phi_2]$ は

$$[\Phi(\phi_1, A_1, B_1, \nu_1),\ \Phi(\phi_2, A_2, B_2, \nu_2)] = \Phi(\phi, A, B, \nu)$$
$$\begin{cases} \phi = [\phi_1, \phi_2] + 2A_1 \vee B_2 - 2A_2 \vee B_1 \\ A = (\phi_1 + \dfrac{2}{3}\nu_1)A_2 - (\phi_2 + \dfrac{2}{3}\nu_2)A_1 \\ B = (\phi_1{}' - \dfrac{2}{3}\nu_1)B_2 - (\phi_2{}' - \dfrac{2}{3}\nu_2)B_1 \\ \nu = (A_1, B_2) - (B_1, A_2) \end{cases}$$

で与えられる．

証明　$\alpha \in E_7{}^C$ は条件

$$\begin{cases} \alpha P \times \alpha P = 0, & P \in \mathfrak{M}^C \\ \{\alpha P, \alpha Q\} = \{P, Q\}, & P, Q \in \mathfrak{P}^C \end{cases}$$

（命題4.4）を満たすから $\Phi \in \mathfrak{e}_7{}^C$ は条件

$$\begin{cases} \Phi P\times P=0, & P\in\mathfrak{M}^C \qquad \text{(i)} \\ \{\Phi P, Q\}+\{P, \Phi Q\}=0, & P, Q\in\mathfrak{P}^C \qquad \text{(ii)} \end{cases}$$

を満たしている．さて，$\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ は $\mathfrak{P}^C=\mathfrak{J}^C\oplus\mathfrak{J}^C\oplus C\oplus C$ の C-線型写像であるから，Φ を

$$\Phi=\begin{pmatrix} g & l & C & A \\ k & h & B & D \\ c & a & \nu & \lambda \\ b & d & \kappa & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g, h, k, l\in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C) \\ a, b, c, d\in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C, C) \\ A, B, C, D\in\mathfrak{J}^C \\ \nu, \mu, \kappa, \lambda\in C \end{array}$$

と表しておく．$0\neq r\in C$ に対して，C-同型写像 $f_r:\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を

$$f_r(X, Y, \xi, \eta)=(X, rY, r^2\xi, r^{-1}\eta)$$

で定義すると，f_r は

$$rf_r(P\times Q)f_r{}^{-1}=f_rP\times f_rQ, \qquad P, Q\in\mathfrak{P}^C$$

を満たすことが容易に確かめられる．したがって，$\alpha\in E_7{}^C$ に対して $f_r\alpha f_r{}^{-1}\in E_7{}^C$ となることが分かる．よって，$\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ に対し

$$\mathfrak{e}_7{}^C\ni f_r\Phi f_r{}^{-1}=\begin{pmatrix} g & r^{-1}l & r^{-2}C & rA \\ rk & h & r^{-1}B & r^2D \\ r^2c & ra & \nu & r^3\lambda \\ r^{-1}b & r^{-2}d & r^{-3}\kappa & \mu \end{pmatrix}$$

となる．これが任意の $r\neq0$ について成り立つから，Φ は

$$\Phi=\Phi_{-3}+\Phi_{-2}+\Phi_{-1}+\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3, \quad \Phi_i\in\mathfrak{e}_7{}^C,$$

$$\Phi_{-3}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&\kappa&0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_3=\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&\lambda \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{-2}=\begin{pmatrix} 0&0&C&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&d&0&0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_2=\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&D \\ c&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{-1}=\begin{pmatrix} 0&l&0&0 \\ 0&0&B&0 \\ 0&0&0&0 \\ b&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_1=\begin{pmatrix} 0&0&0&A \\ k&0&0&0 \\ 0&a&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_0=\begin{pmatrix} g&0&0&0 \\ 0&h&0&0 \\ 0&0&\nu&0 \\ 0&0&0&\mu \end{pmatrix}$$

と分割される．

$\Phi_{-3}\dot{1}\times\dot{1}=0$ より $\kappa=0$ を得る．よって $\Phi_{-3}=0$ である．同様に $\Phi_3=0$ であ

る．

$\Phi_{-2}\dot{1}\times\dot{1}=0$ より $C=0$ を得る．さらに $P=(Y\times Y,\ Y, 1, \det Y)\in\mathfrak{M}^C$（補題4.2）に対して $\Phi_{-2}P\times P=0$，すなわち $(0,0,0,d(Y))\times(Y\times Y,\ Y, 1, \det Y)=0$ より $d=0$ を得る．よって $\Phi_{-2}=0$ である．同様に $\Phi_2=0$ である．

$P=(Y\times Y,\ Y, 1, \det Y)\in\mathfrak{M}^C$ に対して $\Phi_{-1}P\times P=0$，すなわち $(l(Y), B, 0, b(Y\times Y))\times(Y\times Y,\ Y, 1, \det Y)=0$ より

$$l(Y)=2B\times Y$$

を得る．さらに $P=(X, X\times X, \det X, 1)\in\mathfrak{M}^C$ に対して $\Phi_{-1}P\times P=0$，すなわち $(l(X\times X), (\det X)B, 0, b(X))\times(X, X\times X, \det X, 1)=0$（の 4 番目の条件）より

$$2(B\times(X\times X), X\times X)+(\det X)(X, B)=3(\det X)b(X),$$

$$3(\det X)(B, X)=3(\det X)b(X),$$

$$b(X)=(B, X)$$

を得る．(b は連続であり，$\{X\in\mathfrak{J}^C\,|\det X\neq 0\}$ は $\mathfrak{J}^C$ で稠密であるから，$\det X=0$ である X に対しても上式は成り立つ)．同様にして

$$k(X)=2A\times X,\quad a(Y)=(A,\ Y)$$

を得る．

$P=(X, X\times X, \det X, 1)\in\mathfrak{M}^C$ に対して $\Phi_0P\times P=0$，すなわち $(g(X), h(X\times X), (\det X)\nu, \mu)\times(X, X\times X, \det X, 1)=0$ より

$$2g(X)\times X=\mu X\times X+h(X\times X) \tag{i}$$

$$2h(X\times X)\times(X\times X)=(\det X)(\nu X+g(X)) \tag{ii}$$

$$(g(X), X\times X)+(h(X\times X), X)=3(\nu+\mu)\det X \tag{iii}$$

を得る．$\phi=g-\dfrac{1}{3}(\nu+2\mu)1$ とおくと

$$\begin{aligned}3(\phi X, X\times X)&=3(g(X), X, X)-(\nu+2\mu)(X, X, X)\\&\underset{\text{(i)}}{=}(\mu X\times X+h(X\times X), X)+(g(X), X\times X)-3(\nu+2\mu)\det X\\&\underset{\text{(iii)}}{=}3\mu\det X+3(\nu+\mu)\det X-3(\nu+2\mu)\det X=0\end{aligned}$$

となる．よって

$$\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$$

である．同様にして，$\psi=h-\dfrac{1}{3}(2\nu+\mu)1\in\mathfrak{e}_6{}^C$ となる．また，(ii) から

$$2(\psi(X\times X)+\frac{1}{3}(2\nu+\mu)X\times X)\times(X\times X)$$

$$=(\det X)\Big(\nu X+\phi X+\frac{1}{3}(\nu+2\mu)X\Big),$$

$$2\psi(X\times X)\times(X\times X)=(\det X)\phi X,$$

$$\psi'((X\times X)\times(X\times X))=(\det X)\phi X \quad (\text{補題}3.30),$$

$$(\det X)\psi' X=(\det X)\phi X$$

より（$\det X=0$ となる X に対しても）$\psi' X=\phi X$ となり

$$\psi'=\phi$$

を得る．最後に $\{\Phi\dot{1},\underset{\cdot}{1}\}+\{\dot{1},\Phi\underset{\cdot}{1}\}=0$ より

$$\nu+\mu=0$$

を得る．以上で $\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ は

$$\Phi=\begin{pmatrix} \phi-\frac{1}{3}\nu & 2B & 0 & A \\ 2A & \phi'+\frac{1}{3}\nu & B & 0 \\ 0 & A & \nu & 0 \\ B & 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix}$$

$$=\Phi(\phi,A,B,\nu),\quad \phi\in\mathfrak{e}_6{}^C,\quad A,B\in\mathfrak{J}^C,\quad \nu\in C$$

の形をしていることが分かった．

$\Phi_i=\Phi(\phi_i,A_i,B_i,\nu_i)$，$\phi_i\in\mathfrak{e}_6{}^C$，$A_i,B_i\in\mathfrak{J}^C$，$\nu_i\in C$，$i=1,2$ の Lie 積 $[\Phi_1,\Phi_2]$ を求めよう．$P\in\mathfrak{P}^C$ に対し

$$[\Phi_1,\Phi_2]P=\Phi_1\Phi_2P-\Phi_2\Phi_1P$$

$$=\cdots(A\vee B \text{ の公式（補題3.28）等を用いる})\cdots$$

$$=\Phi P \quad (\Phi \text{ は定理4.5にあるもの})$$

となることが実際の計算により確かめられる．

逆に，$\Phi=\Phi(\phi,A,B,\nu)$，$\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$，$A,B\in\mathfrak{J}^C$，$\nu\in C$ が $\mathfrak{e}_7{}^C$ に属すること，すなわち，すべての $t\in C$ に対し $\exp t\Phi\in E_7{}^C$ となることを示そう．そのために次の命題を準備する．

命題4.6　$\Phi=\Phi(\phi,A,B,\nu)$，$\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$，$A,B\in\mathfrak{J}^C$，$\nu\in C$ と $P,Q\in\mathfrak{P}^C$ に対し

$$[\Phi,P\times Q]=\Phi P\times Q+P\times\Phi Q$$

が成り立つ．

証明　$[\Phi,P\times P]=2\Phi P\times P$ を示せば十分である．さて，

$$[\Phi, P\times P] \qquad P=(X, Y, \xi, \eta)$$
$$=\Big[\Phi(\phi, A, B, \nu), \Phi\Big(-X\vee Y, -\frac{1}{2}(Y\times Y-\xi X), \frac{1}{2}(X\times X-\eta Y), \frac{1}{4}((X, Y)-3\xi\eta)\Big)\Big]$$

$=\cdots(\phi(X\times Y)=\phi' X\times Y+X\times\phi' Y$ (補 題3.30), $[\phi, A\vee B]=\phi A\vee B$ $+A\vee\phi' B$ (補題3.31), $A\vee B$ の公式 (補題3.28) 等を用いる)$\cdots$

$=2\Phi P\times P$

となる.

定理4.5の証明に戻ろう. $\Phi=\Phi(\phi, A, B, \nu)$, $\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$, $A, B\in\mathfrak{J}^C$, $\nu\in C$ と $t\in C$ に対し

$$\begin{aligned}
&(\exp t\Phi)(P\times Q)(\exp t\Phi)^{-1} \qquad P, Q\in\mathfrak{J}^C\\
&=(\exp t(\mathrm{ad}\,\Phi))(P\times Q) \qquad ((\mathrm{ad}\,\Phi)\Phi_1=[\Phi, \Phi_1])\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(t\ \mathrm{ad}\,\Phi)^n(P\times Q)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}\Phi^i P\times\Phi^j Q \quad (\text{命題}4.6)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{t^i t^j}{i!j!}\Phi^i P\times\Phi^j Q\\
&=\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(t\Phi)^i P\Big)\times\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(t\Phi)^j Q\Big)\\
&=(\exp t\Phi)P\times(\exp t\Phi)Q
\end{aligned}$$

を得る. よって $\exp t\Phi\in E_7{}^C$ となり $\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ が分かった. 以上で定理4.5が証明された.

定義 C-線型写像 $\lambda: \mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を

$$\lambda(X, Y, \xi, \eta)=(Y, -X, \eta, -\xi)$$

で定義する.

補題4.7 (1) $\lambda\in E_7$ であり, $\lambda^2=-1$, $\lambda^4=1$ である.

(2) $(P, Q)=\{\lambda P, Q\}=-\{P, \lambda Q\}$, $\langle P, Q\rangle=\{\tau\lambda P, Q\}$, $P, Q\in\mathfrak{P}^C$.

(3) $\alpha\in E_7{}^C$ に対し

$${}^t\alpha^{-1}=\lambda\alpha\lambda^{-1}$$

が成り立つ (E_6, **1** 参照). (ここに ${}^t\alpha$ は内積 (P, Q) に関する転置写像であ

る：$({}^t\alpha P, Q)=(P, \alpha Q))$.

(4) $\alpha\in E_7{}^C$ が $\alpha\in E_7$ になるための必要十分条件は

$$\tau\lambda\alpha=\alpha\tau\lambda$$

である．

(5) $\Phi(\phi, A, B, \nu)\in\mathfrak{e}_7{}^C$ に対し

$$\lambda\Phi(\phi, A, B, \nu)\lambda^{-1}=\Phi(\phi', -B, -A, -\nu)$$

が成り立つ．

証明 (1), (2) は明らかである．

(3) $(P, \lambda Q)=\{P, Q\}=\{\alpha P, \alpha Q\}$ (命題4.4) $=(\alpha P, \lambda\alpha Q)=(P, {}^t\alpha\lambda\alpha Q)$ より $\lambda={}^t\alpha\lambda\alpha$ となり ${}^t\alpha^{-1}=\lambda\alpha\lambda^{-1}$ を得る．

(4) $\alpha\in E_7{}^C$ が $\tau\lambda\alpha=\alpha\tau\lambda$ を満たせば $\langle\alpha P, \alpha Q\rangle=\{\tau\lambda\alpha P, \alpha Q\}=\{\alpha\lambda\tau P, \alpha Q\}$ $=\{\tau\lambda P, Q\}$ (命題4.4) $=\langle P, Q\rangle$, $P, Q\in\mathfrak{P}^C$ となる．よって $\alpha\in E_7$ である．逆も正しい．

(5) 容易である．

定理4.8 Lie 群 E_7 の Lie 環 $\mathfrak{e}_7$ は

$$\mathfrak{e}_7=\{\,\Phi(\phi, A, -\tau A, \nu)\,|\,\phi\in\mathfrak{e}_6, A\in\mathfrak{J}^C, \nu\in i\boldsymbol{R}\,\},$$

$$\Phi(\phi, A, -\tau A, \nu)=\begin{pmatrix} \phi-\dfrac{1}{3}\nu & -2\tau A & 0 & A \\ 2A & \tau\phi\tau+\dfrac{1}{3}\nu & -\tau A & 0 \\ 0 & A & \nu & 0 \\ -\tau A & 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix}$$

となる．$\mathfrak{e}_7$ における Lie 積 $[\Phi_1, \Phi_2]$ は

$$[\Phi(\phi_1,\ A_1,\ -\tau A_1,\ \nu_1),\ \Phi(\phi_2,\ A_2,\ -\tau A_2,\ \nu_2)]=\Phi(\phi,\ A,\ -\tau A,\ \nu),$$

$$\begin{cases} \phi=[\phi_1, \phi_2]-2A_1\vee\tau A_2+2A_2\vee\tau A_1 \\ A=\left(\phi_1+\dfrac{2}{3}\nu_1\right)A_2-\left(\phi_2+\dfrac{2}{3}\nu_2\right)A_1 \\ \nu=\langle A_1, A_2\rangle-\langle A_2, A_1\rangle \end{cases}$$

で与えられる．特に，$\mathfrak{e}_7$ の次元は

$$\dim\mathfrak{e}_7=78+54+1=133$$

である．

証明　$\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ が $\Phi\in\mathfrak{e}_7$ となる必要十分条件は

$$\tau\lambda\Phi\lambda^{-1}\tau=\Phi$$

である(補題4.7(4))から，定理4.5に補題4.7(5)と $\tau\Phi(\phi, A, B, \nu)\tau=\Phi(\tau\phi\tau, \tau A, \tau B, \tau\nu)$ を用いると定理を得る．

4　E_7 の部分群 E_6

E_7 の部分群

$$(E_7)_{\dot{1}}=\{\alpha\in E_7 \mid \alpha\dot{1}=\dot{1}\}$$

を考察しよう．

補題4.9　$\alpha\in E_7$ が $\alpha\dot{1}=\dot{1}$ を満たすならば $\alpha\underset{\cdot}{1}=\underset{\cdot}{1}$ を満たす．逆も正しい．

証明　$\alpha\underset{\cdot}{1}=(X, Y, \xi, \eta)$ とおく．$\xi=\langle\dot{1}, \alpha\underset{\cdot}{1}\rangle=\langle\alpha\dot{1}, \alpha\underset{\cdot}{1}\rangle=\langle\dot{1}, \underset{\cdot}{1}\rangle=0$，$\eta=\{\dot{1}, \alpha\underset{\cdot}{1}\}=\{\alpha\dot{1}, \alpha\underset{\cdot}{1}\}=\{\dot{1}, \underset{\cdot}{1}\}$ (命題4.4) $=1$ となる．さらに $\langle\alpha\underset{\cdot}{1}, \alpha\underset{\cdot}{1}\rangle=\langle\underset{\cdot}{1}, \underset{\cdot}{1}\rangle=1$，すなわち $\langle X, X\rangle+\langle Y, Y\rangle+1=1$ より $X=Y=0$ となり $\alpha\underset{\cdot}{1}=\underset{\cdot}{1}$ を得る．逆も同様である．

定理4.10　$$(E_7)_{\dot{1}}\cong E_6.$$

証明　$\alpha\in E_6$ に対し

$$\tilde{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \tau\alpha\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in(E_7)_{\dot{1}}\subset E_7$$

を対応させる．そのために，まず $\tilde{\alpha}\in E_7$ を示さなければならない．実際，

$\tilde{\alpha}P\times\tilde{\alpha}Q$　　$P=(X, Y, \xi, \eta)$，$Q=(Z, Y, \zeta, \omega)\in\mathfrak{P}^C$

$=(\alpha X, \tau\alpha\tau Y, \xi, \eta)\times(\alpha Z, \tau\alpha\tau W, \zeta, \omega)$

$=\cdots$(公式 $\alpha(X\vee Y)\alpha^{-1}=\alpha X\vee\tau\alpha\tau Y$，$(\alpha\phi\alpha^{-1})'=(\tau\alpha\tau)\phi'(\tau\alpha^{-1}\tau)$ 等を用いる)$\cdots$

$=\tilde{\alpha}(P\times Q)\tilde{\alpha}^{-1}$

を得る．$\langle\tilde{\alpha}P, \tilde{\alpha}Q\rangle=\langle P, Q\rangle$ は自明である．よって $\tilde{\alpha}\in E_7$ であり，さらに

$\tilde{\alpha}\in(E_7)_{\rm i}$ である.

逆に $\alpha\in E_7$ が $\alpha\dot{1}=\dot{1}$, $\alpha\underset{\cdot}{1}=\underset{\cdot}{1}$ を満たすとする (補題4.9). このとき α は

$$\alpha=\begin{pmatrix}\beta & \varepsilon & 0 & 0\\ \delta & \beta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \beta, \beta_1, \delta, \varepsilon\in{\rm Hom}_C(\mathfrak{J}^C)$$

の形をしている. 実際, α の左下の部分が 0 であることは $\langle\alpha\dot{X}, \dot{1}\rangle=\langle\alpha\dot{X}, \alpha\dot{1}\rangle=\langle\dot{X}, \dot{1}\rangle=0$, $\langle\alpha\dot{X}, \underset{\cdot}{1}\rangle=\langle\alpha\dot{X}, \alpha\underset{\cdot}{1}\rangle=\langle\dot{X}, \underset{\cdot}{1}\rangle=0$ 等より分かる. さて

$$\mathfrak{M}^C\ni\alpha\begin{pmatrix}X\\ \dfrac{1}{\eta}X\times X\\ \dfrac{1}{\eta^2}\det X\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta X+\dfrac{1}{\eta}\varepsilon(X\times X)\\ \delta X+\dfrac{1}{\eta}\beta_1(X\times X)\\ \dfrac{1}{\eta^2}\det X\\ \eta\end{pmatrix}$$

であるから

$$\Big(\beta X+\frac{1}{\eta}\varepsilon(X\times X)\Big)\times\Big(\beta X+\frac{1}{\eta}\varepsilon(X\times X)\Big)=\eta\Big(\delta X+\frac{1}{\eta}\beta_1(X\times X)\Big)$$

がすべての $\eta\neq0$ で成り立つ. 両辺の η の係数を比較して $\delta=0$ を得る. 同様に $\alpha\Big(\dfrac{1}{\xi}(Y\times Y), Y, \xi, \dfrac{1}{\xi^2}\det Y\Big)\in\mathfrak{M}^C$ より $\varepsilon=0$ を得る. 再び

$$\mathfrak{M}^C\ni\alpha(X, X\times X, \det X, 1)=(\beta X, \beta_1(X\times X), \det X, 1)$$

より

$$\beta X\times\beta X=\beta_1(X\times X),\quad (\beta X, \beta_1(X\times X))=3\det X$$

を得る. これより

$$3\det\beta X=(\beta X, \beta X\times\beta X)=(\beta X, \beta_1(X\times X))=3\det X$$

となるから $\beta\in E_6{}^C$ である. さらに $\langle\alpha\dot{X}, \alpha\dot{X}'\rangle=\langle\dot{X}, \dot{X}'\rangle$ より $\langle\beta X, \beta X'\rangle=\langle X, X'\rangle$ を得る. よって $\beta\in E_6$ である. 次に

$$\beta_1(X\times X)=\beta X\times\beta X=\tau\beta\tau(X\times X)$$

となる. X の代りに $X\times X$ とおくと, $(\det X)\beta_1X=(\det X)\tau\beta\tau X$ となるから $\beta_1X=\tau\beta\tau X$ ($\det X=0$ となる X に対しても) となる. よって $\beta_1=\tau\beta\tau$ を得る. 以上で定理が証明された.

定理4.11　$0\neq\theta\in C$に対し, C-線型写像 $\phi(\theta):\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を

$$\phi(\theta)(X, Y, \xi, \eta)=(\theta^{-1}X, \theta Y, \theta^3\xi, \theta^{-3}\eta)$$

で定義する．さて，E_7 は

$$U(1)=\{\,\phi(\theta)\,|\,\theta\in C,(\tau\theta)\theta=1\}$$

を部分群として含んでいる．この群はユニタリ群 $U(1)=\{\,\theta\in C\,|\,(\tau\theta)\theta=1\}$ に同型である．

証明　$\phi(\theta)\in E_7$ $(\theta\in C,(\tau\theta)\theta=1)$ は容易に確かめられる．

5　E_7 の連結性

E_7 の単位元を含む連結成分を $(E_7)_0$ で表す．$(E_7)_0=E_7$ を示そう．

補題4.12　($a\in C$ に対しても $\sqrt{(\tau a)a}$ を $|a|$ で表すことにする)．$a\in C$ に対し，写像 $\alpha_i(a):\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$，$i=1,2,3$ を

$$\alpha_i(a)=\begin{pmatrix} 1+(\cos|a|-1)p_i & 2a\dfrac{\sin|a|}{|a|}E_i & 0 & -\tau a\dfrac{\sin|a|}{|a|}E_i \\ -2\tau a\dfrac{\sin|a|}{|a|}E_i & 1+(\cos|a|-1)p_i & a\dfrac{\sin|a|}{|a|}E_i & 0 \\ 0 & -\tau a\dfrac{\sin|a|}{|a|}E_i & \cos|a| & 0 \\ a\dfrac{\sin|a|}{|a|}E_i & 0 & 0 & \cos|a| \end{pmatrix}$$

($a=0$ のときには $\dfrac{\sin|a|}{|a|}=1$ とする) で定義すると，$\alpha_i(a)\in(E_7)_0$ である．ここに $p_i:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ は

$$p_i\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi_1 & \delta_{i3}x_3 & \delta_{i2}\overline{x}_2 \\ \delta_{i3}\overline{x}_3 & \xi_2 & \delta_{i1}x_1 \\ \delta_{i2}x_2 & \delta_{i1}\overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

(δ_{ij} は Kronecker の δ) で定義される C-線型写像である．なお $\alpha_1(a_1)$，$\alpha_2(a_2)$，$\alpha_3(a_3)$ $(a_i\in C)$ は可換である．

証明　$\Phi_i(a)=\Phi(0,-\tau aE_i,aE_i,0)\in\mathfrak{e}_7$ (定理4.8) に対し $\alpha_i(a)=\exp\Phi_i(a)$ である(計算略)．よって $\alpha_i(a)\in(E_7)_0$ である．$[\Phi_i(a_i),\Phi_j(a_j)]=0$ である(定理4.5) から，$\alpha_i(a_i)$，$\alpha_j(a_j)$ は可換である．

命題4.13　任意の $P\in\mathfrak{M}^C$ は，ある $\alpha\in(E_7)_0$ により対角線形に変形され

る：

$$\alpha P=(X,\ Y,\xi,\eta),\qquad X,\ Y \text{ は対角線形},\ \xi>0.$$

証明　$P=(X,\ Y,\xi,\eta)\in\mathfrak{M}^C$ とする．まず，P が $\xi\neq 0$ の対角線形に変形されることを示そう．

(1)　$P=(X,\ Y,\xi,\eta)$，$\xi\neq 0$ のとき．このとき $X=\dfrac{1}{\xi}(Y\times Y)$ である．$\beta\in E_6$ を $\tau\beta\tau Y$ が対角線形になるように選ぶ（命題3.7）と，

$$\beta X=\frac{1}{\xi}\beta(Y\times Y)=\frac{1}{\xi}\tau\beta\tau Y\times\tau\beta\tau Y$$

も対角線形である．

(2)　$P=(X,\ Y,0,\eta)$，$Y\neq 0$ のとき．$\beta\in E_6$ を

$$\tau\beta\tau Y=\begin{pmatrix}\eta_1 & 0 & 0\\ 0 & \eta_2 & 0\\ 0 & 0 & \eta_3\end{pmatrix},\quad \eta_i\in C$$

となるように選ぶ(命題3.7)．$\tau\beta\tau Y\neq 0$ であるから，ある η_i は 0 でない：$\eta_i\neq 0$．補題4.12の $\alpha_i\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big)\in(E_7)_0$ を βP に施すと

$$\alpha_i\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\beta P=\begin{pmatrix}1-p_i & -2E_i & 0 & E_i\\ 2E_i & 1-p_i & -E_i & 0\\ 0 & E_i & 0 & 0\\ -E_i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta X\\ \tau\beta\tau Y\\ 0\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ \eta_i\\ *\end{pmatrix}$$

となり，(1)に帰着される．

(3)　$P=(X,0,0,\eta)$，$X\neq 0$ のとき．$\beta\in E_6$ を $\beta X=\xi_1E_1+\xi_2E_2+\xi_3E_3$，$\xi_i\in C$ となるように選ぶ(命題3.7)．$\beta X\neq 0$ であるからある ξ_i は 0 でない：$\xi_i\neq 0$．このとき

$$\alpha_{i+1}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\beta P=(*,\xi_iE_{i+2}+\xi_{i+2}E_i,0,*),\quad \xi_i\neq 0$$

となり，(2)に帰着される．

(4)　$P=(0,0,0,\eta)$，$\eta\neq 0$ のとき．

$$\alpha_1\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)P=(\eta E_1,0,0,0),\quad \eta\neq 0$$

となり，(3)に帰着される．

以上で P は $\alpha\in(E_7)_0$ で $\xi\neq 0$ なる対角線形に変形された．最後に，ξ はある $\phi(\theta)\in U(1)\subset(E_7)_0$（定理4.11）により $\xi>0$ とすることができる．以上で命題が証明された．

compact Freudenthal 多様体とよばれる空間 $\mathfrak{M}_1$ を

$$\mathfrak{M}_1=\{P\in\mathfrak{P}^C\,|\,P\times P=0,\langle P,P\rangle=1\}$$

で定義する．

定理4.14 $E_7/E_6\simeq\mathfrak{M}_1$.

特に E_7 は連結である．

証明 $\alpha\in E_7$, $P\in\mathfrak{M}_1$ ならば $\alpha P\in\mathfrak{M}_1$ であるから，E_7 は $\mathfrak{M}_1$ に働く．$(E_7)_0$ が $\mathfrak{M}_1$ に推移的に働くことを示そう．そのためには，任意の $P\in\mathfrak{M}_1$ がある $\alpha\in(E_7)_0$ により $\alpha P=\dot{1}\in\mathfrak{M}_1$ となることを示せばよい．さて，$P\in\mathfrak{M}_1$ を $\alpha\in(E_7)_0$ により

$$\alpha P=\left(\frac{1}{\xi}\begin{pmatrix}\eta_2\eta_3 & 0 & 0\\ 0 & \eta_3\eta_1 & 0\\ 0 & 0 & \eta_1\eta_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta_1 & 0 & 0\\ 0 & \eta_2 & 0\\ 0 & 0 & \eta_3\end{pmatrix},\xi,\frac{1}{\xi^2}\eta_1\eta_2\eta_3\right),\quad \xi>0$$

に変形する（命題4.13）．条件 $\langle\alpha P,\alpha P\rangle=\langle P,P\rangle=1$ は

$$\frac{1}{\xi^2}(|\eta_2\eta_3|^2+|\eta_3\eta_1|^2+|\eta_1\eta_2|^2)+(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2+|\eta_3|^2)+\xi^2+\frac{1}{\xi^4}|\eta_1\eta_2\eta_3|^2=1$$

すなわち

$$\left(1+\frac{|\eta_1|^2}{\xi^2}\right)\left(1+\frac{|\eta_2|^2}{\xi^2}\right)\left(1+\frac{|\eta_3|^2}{\xi^2}\right)=\frac{1}{\xi^2}\qquad\text{(i)}$$

である．$r_i\in\boldsymbol{R}$，$0\leqq r_i<\dfrac{\pi}{2}$ を

$$\tan r_i=\frac{|\eta_i|}{\xi},\qquad i=1,2,3$$

のようにとると，(i) は

$$\xi=\cos r_1\cos r_2\cos r_3$$

となる．さらに，$a_i\in C$ を

$$a_i=\frac{\eta_i}{|\eta_i|}r_i,\qquad i=1,2,3$$

（$\eta_i=0$ ならば $a_i=0$ とする）とおくと

$$r_i=|a_i|,\quad \eta_i=\frac{a_i}{|a_i|}\tan r_i\cos r_1\cos r_2\cos r_3$$

となるから

$\alpha P=$

$$
\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\cos|a_1|a_2\dfrac{\sin|a_2|}{|a_2|}a_3\dfrac{\sin|a_3|}{|a_3|} & 0 & 0 \\
0 & a_1\dfrac{\sin|a_1|}{|a_1|}\cos|a_2|a_3\dfrac{\sin|a_3|}{|a_3|} & 0 \\
0 & 0 & a_1\dfrac{\sin|a_1|}{|a_1|}a_2\dfrac{\sin|a_2|}{|a_2|}\cos|a_3|
\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}
a_1\dfrac{\sin|a_1|}{|a_1|}\cos|a_2|\cos|a_3| & 0 & 0 \\
0 & \cos|a_1|a_2\dfrac{\sin|a_2|}{|a_2|}\cos|a_3| & 0 \\
0 & 0 & \cos|a_1|\cos|a_2|a_3\dfrac{\sin|a_3|}{|a_3|}
\end{pmatrix} \\
\cos|a_1|\cos|a_2|\cos|a_3| \\
a_1\dfrac{\sin|a_1|}{|a_1|}a_2\dfrac{\sin|a_2|}{|a_2|}a_3\dfrac{\sin|a_3|}{|a_3|}
\end{pmatrix}
$$

となる．一方，$\alpha_3(a_3)\alpha_2(a_2)\alpha_1(a_1)\dot{1}$ を計算すると上記になる(計算略)．よって

$$\alpha_1(a_1)^{-1}\alpha_2(a_2)^{-1}\alpha_3(a_3)^{-1}\alpha P=\dot{1}$$

となり，$(E_7)_0$ の推移性が示された．これより $\mathfrak{M}_1=(E_7)_0\dot{1}$ となるので $\mathfrak{M}_1$ は連結である．さて，E_7 は $\mathfrak{M}_1$ に推移的に働き，$\dot{1}\in\mathfrak{M}_1$ における E_7 の等方群が E_6 である（定理4.10）から，同相 $E_7/E_6\simeq\mathfrak{M}_1$ を得る．$\mathfrak{M}_1$，E_6 が連結であるから，E_7 も連結である．

6　E_7 の中心 $z(E_7)$

定理4.15　群 E_7 の中心 $z(E_7)$ は位数 2 の巡回群である：

$$z(E_7)=\{1,\ -1\}.$$

証明　$\alpha\in z(E_7)$ とする．$\beta\in E_6\subset E_7$ に対して $\beta\alpha\mathrm{i}=\alpha\beta\mathrm{i}=\alpha\mathrm{i}$ である．$\alpha\mathrm{i}=(X,Y,\xi,\eta)$ とおくと，$(\beta X,\tau\beta\tau Y,\xi,\eta)=(X,Y,\xi,\eta)$ より

$$\text{すべての } \beta\in E_6 \text{ に対して}\quad \beta X=X,\ \ \tau\beta\tau Y=Y$$

となる．これより $X=Y=0$ を得る．（実際，E_6 の中心の元 $\beta=\omega 1$（定理3.9）をとれば分かる）．よって

$$\alpha\dot{1}=(0,0,\xi,\eta)$$

である．$\alpha\dot{1}\in\mathfrak{M}^C$ より $\xi\eta=0$ である．もし $\xi=0$ とすると $\alpha\dot{1}=\underset{\cdot}{\eta}$, $\eta\neq 0$ となる．α と $\phi(\theta)\in U(1)\subset E_7$（定理4.11）の可換性より

$$\theta^{-3}\underset{\cdot}{\eta}=\phi(\theta)\underset{\cdot}{\eta}=\phi(\theta)\alpha\dot{1}=\alpha\phi(\theta)\dot{1}=\alpha\theta^3\dot{1}=\theta^3\underset{\cdot}{\eta}$$

がすべての $\theta\in U(1)$ で成り立つので $\eta=0$ となり矛盾する．よって，$\xi\neq 0$, $\eta=0$ であり，$\alpha\dot{1}=\dot{\xi}$ となる．同様に $\alpha\underset{\cdot}{1}=\underset{\cdot}{\zeta}$ となる．$\{\alpha\dot{1},\alpha\underset{\cdot}{1}\}=\{\dot{1},\underset{\cdot}{1}\}=1$ より $\xi\zeta=1$，よって

$$\alpha\dot{1}=\dot{\xi},\quad \alpha\underset{\cdot}{1}=\underset{\cdot}{\xi^{-1}}$$

となる．さらに，$\lambda\in E_7$ との可換性から

$$-\underset{\cdot}{\xi}=\lambda\dot{\xi}=\lambda\alpha\dot{1}=\alpha\lambda\dot{1}=\alpha(-\underset{\cdot}{1})=-\underset{\cdot}{\xi^{-1}}$$

となり $\xi=\xi^{-1}$，すなわち $\xi=\pm 1$ である．$\xi=1$ のときには $\alpha\in E_6$ となり(定理4.10)，$\alpha\in z(E_6)=\{1,\omega,\omega^2 1\}$，$1\neq\omega\in C$，$\omega^3=1$ (定理3.9) となる．よって

$$\alpha=\begin{pmatrix}\omega 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \omega^{-1}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \omega\in C,\quad \omega^3=1$$

であるが，再び $\lambda\in E_7$ との可換性より

$$-(\omega X)_{\cdot}=\lambda(\omega X)^{\cdot}=\lambda\alpha\dot{X}=\alpha\lambda\dot{X}=\alpha(-\underset{\cdot}{X})=-(\omega^{-1}X)_{\cdot},\quad X\in\mathfrak{J}^C$$

となるので $\omega=\omega^{-1}$，すなわち $\omega=1$ となる．よって $\alpha=1$ である．$\xi=-1$ のときは $-\alpha\in z(E_6)$ となり，同様にして $-\alpha=1$ が分かる．よって $z(E_7)=\{1,-1\}$ が示された．

compact 単純 Lie 群の一般論によれば，単連結な compact E_7 型 Lie 群の中心は位数 2 の巡回群であることが知られている．後で (定理4.44) Lie 環 $\mathfrak{e}_7$ が E_7 型であることを示すので，この Lie 群 E_7 は単連結でなければならない．よって次の定理を得る．

定理4.16　E_7 は単連結 compact Lie 群で，その次元は133である．

7　E_7 の対合自己同型写像 ι と部分群 $(U(1)\times E_6)/Z_3$

定義　C-線型写像 $\iota:\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を

$$\iota(X,Y,\xi,\eta)=(-iX,iY,-i\xi,i\eta)$$

で定義する．$\iota=\phi(i)\in U(1)\subset E_7$ (定理4.11) であり，$\iota^2=-1$，$\iota^4=1$ である．(ι は λ に E_7 の中で共役である．実際，$\delta=\alpha_1\left(\dfrac{i\pi}{4}\right)\alpha_2\left(\dfrac{i\pi}{4}\right)\alpha_3\left(\dfrac{i\pi}{4}\right)$ (補題4.12)

とおくとき，$\iota=\delta^{-1}\lambda\delta$ となる).

ι は E_7 の対合自己同型写像 $\tilde{\iota}: E_7\to E_7$, $\tilde{\iota}(\alpha)=\iota\alpha\iota^{-1}$ を誘導する．E_7 の部分群

$$(E_7)^\iota=\{\alpha\in E_7\,|\,\iota\alpha=\alpha\iota\}$$

を調べよう．

定理4.17 $(E_7)^\iota\cong(U(1)\times E_6)/\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_3=\{(1,1),(\omega,\phi(\omega^2)),(\omega^2,\phi(\omega))\}$, $1\neq\omega\in C$, $\omega^3=1$.

証明 写像 $\varphi: U(1)\times E_6\to(E_7)^\iota$ を

$$\varphi(\theta,\beta)=\phi(\theta)\beta$$

で定義する．明らかに $\varphi(\theta,\beta)\in(E_7)^\iota$ である．$\phi(\theta)\in U(1)$ と $\beta\in E_6$ は可換であるから φ は群準同型写像である．φ の全射を示そう．($(E_7)^\iota$ は単連結 Lie 群 E_7 の対合自己同型写像 ι の不動点部分群として連結である．よって φ_*: $\mathfrak{u}(1)\oplus\mathfrak{e}_6\to(\mathfrak{e}_7)^\iota$ の全射を示せばよい（これは容易である）が，ここでは直接の証明を与えておこう)．$\alpha\in(E_7)^\iota$ とする．$\iota\alpha=\alpha\iota$ より α は

$$\alpha=\begin{pmatrix}\beta&0&M&0\\0&\delta&0&N\\a&0&\mu&0\\0&b&0&\nu\end{pmatrix},\quad\begin{array}{l}\beta,\delta\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{J}^C)\\a,b\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{J}^C,C)\\M,N\in\mathfrak{J}^C\\\mu,\nu\in C\end{array}$$

の形をしている．$\alpha\dot{1},\alpha\underset{\cdot}{1}\in\mathfrak{M}^C$ の条件より

$$\mu M=0,\quad\nu N=0$$

である．$M=N=0$ を示そう．$M\neq0$, $\mu=0$ とすると，条件 $\{\alpha\dot{1},\alpha\underset{\cdot}{1}\}=1$ より

$$(M,N)=1 \tag{i}$$

となる．よって $N\neq0$, $\nu=0$ である．

$$\mathfrak{M}^C\ni\alpha\begin{pmatrix}X\\\frac{1}{\eta}X\times X\\\frac{1}{\eta^2}\det X\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta X+\frac{1}{\eta^2}(\det X)M\\\frac{1}{\eta}\delta(X\times X)+\eta N\\a(X)\\\frac{1}{\eta}b(X\times X)\end{pmatrix}$$

より

$$\left(\frac{1}{\eta}\delta(X\times X)+\eta N\right)\times\left(\frac{1}{\eta}\delta(X\times X)+\eta N\right)=a(X)\left(\beta X+\frac{1}{\eta^2}(\det X)M\right)$$

$$\left(\beta X+\frac{1}{\eta^2}(\det X)M,\frac{1}{\eta}\delta(X\times X)+\eta N\right)=3a(X)\frac{1}{\eta}b(X\times X)$$

がすべての $0\neq\eta\in C$ で成り立つ．η の各係数を比較して

$$2\delta(X\times X)\times N=a(X)\beta X \tag{ii}$$

$$\delta(X\times X)\times\delta(X\times X)=a(X)(\det X)M \tag{iii}$$

$$(\beta X,\delta(X\times X))+\det X\underset{(\mathrm{i})}{=}3a(X)b(X\times X) \tag{iv}$$

を得る．これより

$$\begin{aligned}a(X)\det X&\underset{(\mathrm{i})}{=}a(X)(\det X)(M,N)\underset{(\mathrm{iii})}{=}(\delta(X\times X)\times\delta(X\times X),N)\\&=(\delta(X\times X),\delta(X\times X)\times N)\underset{(\mathrm{ii})}{=}\frac{1}{2}a(X)(\delta(X\times X),\beta X)\\&\underset{(\mathrm{iv})}{=}\frac{1}{2}a(X)(3a(X)b(X\times X)-\det X)\end{aligned}$$

となる．よって $a(X)\det X=a(X)^2b(X\times X)$ となるが，さらに

$$\det X=a(X)b(X\times X) \tag{v}$$

を得る．(実際，$\mu=0$ より $a\neq 0$ である．$a:\mathfrak{J}^C\to C$ は C-線型写像であるから $\{X\in\mathfrak{J}^C\,|\,a(X)\neq 0\}$ は $\mathfrak{J}^C$ で稠密であり，かつ $\det X$, $b(X\times X)$ は X に関して連続であるから，(v) は $a(X)=0$ となる X に対しても成り立つ)．$a\neq 0$, $b\neq 0$ であるから，(v) は行列式 $\det X$ がその成分に関して既約であることに反する．以上で $M=0$ が分かった．同様に $N=0$ である．さて，$\{\alpha\dot{1},\alpha\underset{\cdot}{1}\}=1$, $\langle\alpha\dot{1},\alpha\dot{1}\rangle=1$ より

$$\alpha\dot{1}=\dot{\mu},\quad \alpha\underset{\cdot}{1}=(\mu^{-1})_{\cdot},\qquad \mu\in C,\ (\tau\mu)\mu=1$$

となる．$\theta^3=\mu$ なる $\theta\in C$ をとり，$\beta=\phi(\theta)^{-1}\alpha$ とおくと，$\beta\dot{1}=\dot{1}$, $\beta\underset{\cdot}{1}=\underset{\cdot}{1}$ となる．よって $\beta\in E_6$ であって（定理4.10）

$$\alpha=\phi(\theta)\beta,\qquad \theta\in U(1),\ \beta\in E_6$$

となり，φ の全射が示された．$\mathrm{Ker}\,\varphi=\{(1,1),(\omega,\phi(\omega^2)),(\omega^2,\phi(\omega))\}=\boldsymbol{Z}_3$ は容易である．以上で Lie 群の同型 $(U(1)\times E_6)/\boldsymbol{Z}_3\cong(E_7)^\iota$ を得る．

8　E_7 の対合自己同型写像 σ と部分群 $(SU(2)\times Spin(12))/Z_2$

C-線型写像 $\sigma:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ を C-線型写像 $\sigma:\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$,

$$\sigma(X,Y,\xi,\eta)=(\sigma X,\sigma Y,\xi,\eta)$$

に拡張する．この σ は，$\sigma\in F_4$ を $\sigma\in F_4\subset E_6\subset E_7$ とみなしたものである．E_7 の部分群

$$(E_7)^\sigma=\{\alpha\in E_7\,|\,\sigma\alpha=\alpha\sigma\}$$

を調べよう．そのために，2つの C-線型写像 $\kappa,\mu:\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を

$$\kappa\begin{pmatrix}X\\Y\\\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\kappa_1X\\\kappa_1Y\\-\xi\\\eta\end{pmatrix},\quad \kappa_1X=(E_1,X)E_1-4E_1\times(E_1\times X),$$

$$\mu\begin{pmatrix}X\\Y\\\xi\\\eta\end{pmatrix}=\Phi(0,E_1,E_1,0)\begin{pmatrix}X\\Y\\\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2E_1\times Y+\eta E_1\\2E_1\times X+\xi E_1\\(E_1,Y)\\(E_1,X)\end{pmatrix}$$

で定義する．κ，μ の具体的な形は

$$\kappa(X,Y,\xi,\eta)=\kappa\left(\begin{pmatrix}\xi_1&x_3&\overline{x}_2\\\overline{x}_3&\xi_2&x_1\\x_2&\overline{x}_1&\xi_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta_1&y_3&\overline{y}_2\\\overline{y}_3&\eta_2&y_1\\y_2&\overline{y}_1&\eta_3\end{pmatrix},\xi,\eta\right)$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-\xi_1&0&0\\0&\xi_2&x_1\\0&\overline{x}_1&\xi_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta_1&0&0\\0&-\eta_2&-y_1\\0&-\overline{y}_1&-\eta_3\end{pmatrix},-\xi,\eta\right),$$

$$\mu(X,Y,\xi,\eta)=\left(\begin{pmatrix}\eta&0&0\\0&\eta_3&-y_1\\0&-\overline{y}_1&\eta_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi&0&0\\0&\xi_3&-x_1\\0&-\overline{x}_1&\xi_2\end{pmatrix},\eta_1,\xi_1\right)$$

である．

補題4.18

$$\kappa\mu=-\mu\kappa,\quad \begin{cases}\kappa\sigma=\sigma\kappa\\\mu\sigma=\sigma\mu\end{cases},\quad \begin{cases}\kappa\lambda=-\lambda\kappa\\\mu\lambda=-\lambda\mu\end{cases}.$$

定義　E_7 の部分群 $(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$，$((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ をそれぞれ

$$(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}=\{\alpha\in(E_7)^\sigma\,|\,\kappa\alpha=\alpha\kappa,\ \mu\alpha=\alpha\mu\}$$

$$((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}=\{\alpha\in(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}\,|\,\alpha(0,E_1,0,1)=(0,E_1,0,1)\}$$

で定義する．

命題4.19　Lie 群 $(E_7)^\sigma$，$(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$，$((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ の Lie 環はそれぞれ

(1)　$(\mathfrak{e}_7)^\sigma=\{\Phi\in\mathfrak{e}_7\,|\,\sigma\Phi=\Phi\sigma\}$

$$=\{\Phi(\phi,A,-\tau A,\nu)\in\mathfrak{e}_7\,|\,\phi\in(\mathfrak{e}_6)^\sigma,\ A\in(\mathfrak{J}^C)_\sigma\}$$

(2)　$(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}=\{\Phi\in(\mathfrak{e}_7)^\sigma\,|\,\kappa\Phi=\Phi\kappa,\ \mu\Phi=\Phi\mu\}$

$$=\left\{ \Phi(\phi, A, -\tau A, \nu)\in \mathfrak{e}_7 \,\middle|\, \begin{array}{l} \phi\in(\mathfrak{e}_6)^\sigma, A\in(\mathfrak{J}^C)_\sigma, (E_1, A)=0 \\ \nu=-\dfrac{3}{2}(\phi E_1, E_1) \end{array} \right\}$$

(3) $((\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}=\{\,\Phi\in(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}\mid \Phi((0, E_1, 0, 1))=0\}$

$$=\left\{ \Phi(\phi, A, -\tau A, 0)\in \mathfrak{e}_7 \,\middle|\, \begin{array}{l} \phi\in\mathfrak{e}_6, \phi E_1=0 \\ A\in\mathfrak{J}^C, 2E_1\times A=\tau A \end{array} \right\}$$

で与えられる.

証明 (1) は容易である.

(2) $\Phi=\Phi(\phi, A, -\tau A, \nu)\in\mathfrak{e}_7$ が $\kappa\Phi=\Phi\kappa$, $\mu\Phi=\Phi\mu$ を満たすとする. $\kappa\Phi P=\Phi\kappa P$, $P=(X, Y, \xi, \eta)$ の ξ-項を比較すると

$$-(A, Y)=(A, \kappa_1 Y), \qquad Y\in\mathfrak{J}^C$$

となるので, $Y=E_1$ として $(A, E_1)=0$ を得る. 次に $\mu\Phi P=\Phi\mu P$ の η-項を比較すると

$$(E_1, \phi X)-\frac{1}{3}\nu(E_1, X)=-\nu(E_1, X)$$

となる. $\phi\in(\mathfrak{e}_6)^\sigma$ より $\phi E_1=kE_1$, $k\in i\boldsymbol{R}$ とおくことができる (補題3.11) ので, 上式で $X=E_1$ として $k=-\dfrac{2}{3}\nu$ を得る. 逆に, これらの条件があると $\kappa\Phi=\Phi\kappa$, $\mu\Phi=\Phi\mu$ となることは, 次の補題を用いればよい.

補題4.20 $\mathfrak{J}^C$ において

(i) $A\in(\mathfrak{J}^C)_\sigma$ ならば $\kappa_1(A\times X)=\kappa_1 A\times\kappa_1 X$, $X\in\mathfrak{J}^C$

(ii) $\phi\in(\mathfrak{e}_6)^\sigma$ ならば $\kappa_1\phi=\phi\kappa_1$

(iii) $A\in(\mathfrak{J}^C)_\sigma$, $(E_1, A)=0$ ならば $\kappa_1 A=-A$ であり, かつ

$$-4\tau A\times(E_1\times X)+(E_1, X)A=4E_1\times(A\times X)-\langle A, X\rangle E_1, \quad X\in\mathfrak{J}^C$$

が成り立つ.

命題4.19の残りの証明に戻ろう. (3) $\Phi\in{\mathfrak{e}_7}^{\sigma,\kappa,\mu}$ がさらに $\Phi((0, E_1, 0, 1))=0$ を満たすと, $\nu=0$, $\phi E_1=0$ (このとき $\phi\in(\mathfrak{e}_6)^\sigma$ が導かれる), $2E_1\times A_1=\tau A$ (このとき $A\in(\mathfrak{J}^C)_\sigma$, $(E_1, A)=0$ が導かれる) を得る.

$\nu\in i\boldsymbol{R}$ に対し, C-線型写像 $\phi(\nu):\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}^C$ を

$$\phi(\nu)=2\nu E_1\vee E_1$$

で定義する（補題3.29）．$\phi(\nu)\in(\mathfrak{e}_6)^\sigma$ である．

命題4.21 (1) $\mathfrak{a}_1=\{\,\Phi(\phi(\nu), aE_1, -\tau aE_1, \nu)\,|\,a\in C, \nu\in i\boldsymbol{R}\,\}$
は $(\mathfrak{e}_7)^\sigma$ の部分 Lie 環であり，Lie 環 $\mathfrak{su}(2)=\{\,D\in M(2, C)\,|\,\tau{}^tD=-D\,\}$ に同型である．

(2) Lie 環 $(\mathfrak{e}_7)^\sigma$ は部分 Lie 環 $\mathfrak{a}_1$，$(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ の直和である：

$$(\mathfrak{e}_7)^\sigma=\mathfrak{a}_1\oplus(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}.$$

証明 (1) 写像 $\varphi_*:\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{a}_1$，

$$\varphi_*\left(\begin{pmatrix}\nu & a\\ -\tau a & -\nu\end{pmatrix}\right)=\Phi(\phi(\nu), aE_1, -\tau aE_1, \nu)$$

が同型対応を与えている．（φ_* は Lie 積を保っていることは実際の計算により容易に確かめられる）．

(2) 命題4.19の記号を用いて

$$(\mathfrak{e}_7)^\sigma\ni\Phi\begin{pmatrix}\phi\\ A\\ -\tau A\\ \nu\end{pmatrix}=\Phi\begin{pmatrix}\phi(\nu')\\ aE_1\\ -\tau aE_1\\ \nu'\end{pmatrix}+\Phi\begin{pmatrix}\phi-\phi(\nu')\\ A-aE_1\\ -\tau A+\tau aE_1\\ \nu-\nu'\end{pmatrix}\in\mathfrak{a}_1\oplus(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$$

（ここに $\nu'=\dfrac{\nu}{3}+\dfrac{1}{2}(E_1, \phi E_1)$，$a=(E_1, A)$）に分解すればよい．

補題4.22 $\alpha\in((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ に対し

$$\alpha(0, -E_1, 0, 1)=(0, -E_1, 0, 1)\iff\alpha\dot{1}=\dot{1}$$

が成り立つ．したがって

$$\{\,\alpha\in((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}\,|\,\alpha(0, -E_1, 0, 1)=(0, -E_1, 0, 1)\,\}\cong Spin(10)$$

である．

証明 $\alpha\in(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ が $\alpha(0, E_1, 0, 1)=(0, E_1, 0, 1)$，$\alpha(0, -E_1, 0, 1)=(0, -E_1, 0, 1)$ を満たすならば，$\alpha\dot{1}=\dot{1}$, $\alpha\dot{E}_1=\dot{E}_1$ となる．よって $\alpha\dot{1}=\alpha\mu\dot{E}_1=\mu\alpha\dot{E}_1=\mu\dot{E}_1=\dot{1}$ である．逆も同様である．$\alpha\in E_7$ が $\alpha\dot{1}=\dot{1}$ ならば $\alpha\in E_6$ であり（定理4.10），さらに $\alpha E_1=E_1$ より $\alpha\in Spin(10)$ である（定理3.14）．逆も正しい．

命題4.23 $$((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}/Spin(10)\simeq S^{10}.$$
特に $((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ は単連結である．

証明　11次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^{11} を

$$V^{11}=\{P\in\mathfrak{P}^C \mid \kappa P=P,\ \mu\tau\lambda P=P,\ P\times(0,E_1,0,1)=0\}$$

$$=\left\{\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\xi&x\\0&\overline{x}&-\tau\xi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},0,\tau\eta\right)\middle|\begin{array}{l}x\in\mathfrak{C}\\ \xi\in C,\quad \eta\in i\boldsymbol{R}\end{array}\right\}$$

で定義し，ノルム $(P,P)_\mu$ を

$$(P,P)_\mu=\frac{1}{2}\{\mu P,P\}=\overline{x}x+(\tau\xi)\xi+(\tau\eta)\eta$$

で与える．$S^{10}=\{P\in V^{11}\,|\,(P,P)_\mu=1\}$ とおくと，S^{10} は10次元球面である．$\alpha\in((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$，$P\in S^{10}$ ならば $\alpha P\in S^{10}$ である（命題4.4，補題4.7）．よって $((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ は S^{10} に働く．この働き方が推移的であることを示そう．そのためには，任意の $P\in S^{10}$ がある $\alpha\in((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ により $\alpha P=(0,-iE_1,0,i)\in S^{10}$ となることを示せばよい．さて

$$P=\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\xi&x\\0&\overline{x}&-\tau\xi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},0,\tau\eta\right)\in S^{10}$$

に対し，$a\in\boldsymbol{R}$，$0\leqq a<\dfrac{\pi}{4}$ を

$$\tan 2a=\frac{2\eta}{\tau\xi-\xi}$$

のように選ぶ$\left(\tau\xi-\xi=0 \text{ ならば } a=\dfrac{\pi}{4} \text{ とする}\right)$．補題4.12の $\alpha_i(a)$ を用いて，$\alpha_{23}(a)=\alpha_2(a)\alpha_3(a)=\exp(\Phi(0,a(E_2+E_3),-\tau a(E_2+E_3)),0)$ をつくると $\alpha_{23}(a)\in((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ である（命題4.19(3)）ことに注意しよう．$\alpha_{23}(a)P$ の η-項を計算すると $\dfrac{1}{2}(\xi-\tau\xi)\sin 2a-\eta\cos 2a=0$ となる．よって

$$\alpha_{23}(a)P\in S^9=\left\{\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\xi&x\\0&\overline{x}&-\tau\xi\end{pmatrix},0,0,0\right)\middle|\begin{array}{l}\xi\in C,x\in\mathfrak{C}\\(\tau\xi)\xi+x\overline{x}=1\end{array}\right\}$$

となる．$Spin(10)$ は S^9 に推移的に働く（命題3.13）から，ある $\beta\in Spin(10)=(E_6)_{E_1}\subset((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ により

$$\beta\alpha_{23}(a)P=(i(E_2+E_3),0,0,0)$$

にできる．さらに $\alpha_{23}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\in((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ を施すと

$$\alpha_{23}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\beta\alpha_{23}(a)P=(0,-iE_1,0,i)$$

となる．よって推移的である．$(0,-iE_1,0,i)\in S^{10}$ における $((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ の等

方群は $Spin(10)$ である（補題4.22）．よって同相 $((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}/Spin(10)\simeq S^{10}$ を得る．

定理4.24　$$((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}\cong Spin(11).$$

証明　定理3.14と同様にして，群準同型写像
$$p:((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}\to SO(11)=SO(V^{11}),\quad p(\alpha)=\alpha\,|\,V^{11}$$
が定義できる．p が全射であることも，$p:((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}\to SO(11)$ の $(E_6)_{E_1}$ への制限が定理3.14 の $p':Spin(10)\to SO(10)=SO(V^{10})$ ($V^{10}=\{P\in V^{11}\,|\,P=(X,0,0,0)\}$) と一致する（特に p' が全射である）ことと，可換図形
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & Spin(10) & \longrightarrow & ((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1} & \longrightarrow & S^{10} & \longrightarrow & * \\
 & & \downarrow p' & & \downarrow p & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & SO(10) & \longrightarrow & SO(11) & \longrightarrow & S^{10} & \longrightarrow & *
\end{array}$$
より分かる．$\mathrm{Ker}\,p=\{1,\sigma\}$ である．実際 $\alpha\in\mathrm{Ker}\,p$ は $(0,iE_1,0,i)$ を不変にするから，$\alpha\in Spin(10)$ である（補題4.22）．よって定理3.14より $\mathrm{Ker}\,p=\{1,\sigma\}=Z_2$ となる．よって群同型
$$((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}/Z_2\cong SO(11)$$
を得る．これより $((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}$ は $SO(11)$ の連結な（命題4.23）被覆群として $Spin(11)$ に同型である．

補題4.25　$t\in\boldsymbol{R}$ に対し，写像 $\alpha(t):\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ を
$$\alpha(t)\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\eta_1 & y_3 & \overline{y}_2\\ \overline{y}_3 & \eta_2 & y_1\\ y_2 & \overline{y}_1 & \eta_3\end{pmatrix}\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2it}\xi_1 & e^{it}x_3 & e^{it}\overline{x}_2\\ e^{it}\overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ e^{it}x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}e^{-2it}\eta_1 & e^{-it}y_3 & e^{-it}\overline{y}_2\\ e^{-it}\overline{y}_3 & \eta_2 & y_1\\ e^{-it}y_2 & \overline{y}_1 & \eta_3\end{pmatrix}\\ e^{-2it}\xi\\ e^{2it}\eta\end{pmatrix}$$
で定義すると，$\alpha(t)\in(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ である．

証明　$\nu=it$ に対して $\phi(\nu)=2\nu E_1\vee E_1$ とおくと，$\Phi(\phi(\nu),0,0,-2\nu)\in(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ であり（命題4.19），かつ $\alpha(t)=\exp(\Phi(\phi(\nu),0,0,-2\nu))$ である（計算略）．よって $\alpha(t)\in(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ である．

命題4.26 $$(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}/Spin(11)\simeq S^{11}.$$
特に $(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ は単連結である．

証明 12次元 $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 V^{12} を

$$\begin{aligned}V^{12}&=\{P\in\mathfrak{P}^C\mid\kappa P=P,\ \mu\tau\lambda P=P\}\\&=\left\{\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\xi&x\\0&\overline{x}&-\tau\xi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},0,\tau\eta\right)\middle|\begin{matrix}x\in\mathfrak{C}\\\xi,\eta\in C\end{matrix}\right\}\end{aligned}$$

で定義し，ノルム $(P,P)_\mu$ を

$$(P,P)_\mu=\frac{1}{2}\{\mu P,P\}=\overline{x}x+(\tau\xi)\xi+(\tau\eta)\eta$$

で与える．$S^{11}=\{P\in V^{12}|(P,P)_\mu=1\}$ とおくと，S^{11} は11次元球面である．$\alpha\in(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$，$P\in S^{11}$ ならば $\alpha P\in S^{11}$ である（命題4.4，補題4.7）．よって $(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ は S^{11} に働く．この働き方が推移的であることを示そう．そのためには，任意の $P\in S^{11}$ がある $\alpha\in(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ により $\alpha P=(0,E_1,0,1)\in S^{11}$ となることを示せばよい．さて

$$P=\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\xi&x\\0&\overline{x}&-\tau\xi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},0,\tau\eta\right)\in S^{11}$$

に対し，$t\in\boldsymbol{R}$ を $e^{-it}\eta\in i\boldsymbol{R}$ のように選び，補題4.25の $\alpha(t)$ を P に施すと

$$\alpha(t)P\in S^{10}$$

となる．$Spin(11)$ は S^{10} に推移的に働く（命題4.23）から，ある $\beta\in Spin(11)=((E_7)^{\sigma,\kappa,\mu})_{E_1}\subset(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ により

$$\beta\alpha(t)P=(0,-iE_1,0,i)$$

にできる．さらに $\alpha\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\in(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ を施すと

$$\alpha\left(-\frac{\pi}{4}\right)\beta\alpha(t)P=(0,E_1,0,1)$$

となる．よって推移的である．$(0,E_1,0,1)\in S^{11}$ における $(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ の等方群は $Spin(11)$ である（定理4.24）．よって同相 $(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}/Spin(11)\simeq S^{11}$ を得る．

定理4.27 $$(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}\cong Spin(12).$$

証明 定理4.24と同様にして，全射群準同型写像

$$p:(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}\to SO(12)=SO(V^{12}),\quad p(\alpha)=\alpha|V^{12}$$

が定義でき，Ker $p=\{1,\sigma\}=Z_2$ である．よって群同型

$$(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}/Z_2\cong SO(12)$$

を得る．これより $(E_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ は $SO(12)$ の連結な（命題4.26）被覆群として $Spin(12)$ に同型である．

定理4.28　$Spin(12)$ の中心 $z(Spin(12))$ は

$$z(Spin(12))=\{1,-1,\sigma,-\sigma\}=\{1,\sigma\}\times\{1,-\sigma\}\cong \boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2$$

である．そして

$$Spin(12)/\{1,-1\}\cong Spin(12)/\{1,-\sigma\}\cong Ss(12)$$

が成り立つ．

証明　$Spin(12)/\{1,\sigma\}\cong SO(12)$ である（定理4.27）から定理を得る（[3] 定理9.11注意参照）．

定理4.29　$(E_7)^\sigma$ は群 $SU(2)=\{A\in M(2,C)\,|\,(\tau\,{}^tA)A=E,\det A=1\}$ に同型な群

$$\phi(SU(2))=\{\phi(A)\in E_7\,|\,A\in SU(2)\}$$

を部分群として含んでいる．ここに，$A\in SU(2)$ に対し，$\phi(A):\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$ は

$$\phi(A)\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \overline{x}_2\\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\eta_1 & y_3 & \overline{y}_2\\ \overline{y}_3 & \eta_2 & y_1\\ y_2 & \overline{y}_1 & \eta_3\end{pmatrix}\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1' & x_3' & \overline{x}_2'\\ \overline{x}_3' & \xi_2' & x_1'\\ x_2' & \overline{x}_1' & \xi_3'\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\eta_1' & y_3' & \overline{y}_2'\\ \overline{y}_3' & \eta_2' & y_1'\\ y_2' & \overline{y}_1' & \eta_3'\end{pmatrix}\\ \xi'\\ \eta'\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \eta'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\xi'\\ \eta_1'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\eta_2'\\ \xi_3'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\eta_2\\ \xi_3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\eta_3'\\ \xi_2'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\eta_3\\ \xi_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ y_1'\end{pmatrix}=\tau A\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2'\\ y_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_3'\\ y_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\end{pmatrix}$$

とする．

証明　$\Phi(\phi(\nu),aE_1,-\tau aE_1,\nu)\in\mathfrak{a}_1$ $(a\in C,\nu\in i\boldsymbol{R},\phi(\nu)=2\nu E_1\vee E_1)$ の $\mathfrak{P}^C$ への作用は

$$\Phi(\phi(\nu),aE_1,-\tau aE_1,\nu)(X,Y,\xi,\eta)=(X',Y',\xi',\eta'),$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1{}'\\ \eta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu & a\\ -\tau a & -\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\xi'\\ \eta_1{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu & a\\ -\tau a & -\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta_1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\eta_2{}'\\ \xi_3{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu & a\\ -\tau a & -\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_2\\ \xi_3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\eta_3{}'\\ \xi_2{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu & a\\ -\tau a & -\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_3\\ \xi_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_1{}'\\ y_1{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\nu & \tau a\\ -a & \nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2{}'\\ y_2{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3{}'\\ y_3{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

である．よって $A=\exp\begin{pmatrix}\nu & a\\ -\tau a & -\nu\end{pmatrix}\in SU(2)$ に対して，$\phi(A)=\exp(\phi(\nu),$ $aE_1, -\tau aE_1\nu)\in SU(2)$ である．

補題4.30　$(E_7)^\sigma$ は連結である．

証明　$(E_7)^\sigma$ は単連結 Lie 群 E_7 の対合自己同型写像 σ の不動点部分群として連結である．しかし，ここでは次のような証明を与えておこう．

主張 1　任意の $X\in(\mathfrak{J}^C)_\sigma$ は，ある $\alpha\in(E_6)^\sigma$ で対角線形の行列に変形される：

$$\alpha X=\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & \xi_3\end{pmatrix},\quad \xi_i\in C.$$

さらに，$\xi_2\geqq 0$，$\xi_3\geqq 0$ にすることができる．

証明　$i(E_1-E_2)^\sim$，$i(E_1-E_3)^\sim$，$i\tilde{F}_1(a)$，$\tilde{A}_1(a)\in(\mathfrak{e}_6)^\sigma$ に注意すれば，命題3.7と同様にして証明することができる．

主張 2　任意の $P\in(\mathfrak{M}^C)_\sigma=\{P\in\mathfrak{M}^C \mid \sigma P=P\}$ はある $\alpha\in((E_7)^\sigma)_0$ (1 の連結成分) により対角線形に変形される：

$$\alpha P=(X, Y, \xi, \eta),\qquad X, Y \text{ は対角線形},\ \xi>0$$

証明　主張 1 を用い，さらに $\Phi(0, -\tau aE_i, aE_i, 0)\in(\mathfrak{e}_7)^\sigma$，$i=1, 2, 3$ に注意すると，命題4.13と同様にして証明することができる．

主張 3　$$(E_7)^\sigma/(E_6)^\sigma\simeq(\mathfrak{M}_1)_\sigma=\{P\in\mathfrak{M}_1 \mid \sigma P=P\}.$$
特に $(E_7)^\sigma$ は連結である．

証明　補題4.12の $\alpha_i(a)$ が $\alpha_i(a)\in((E_7)^\sigma)_0$ であることに注意すると，定理4.14と同様にして証明することができる．$(\mathfrak{M}_1)_\sigma$ と $(E_6)^\sigma\cong(U(1)\times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4$（定理3.17）が連結であるから $(E_7)^\sigma$ も連結である．

定理4.31　$(E_7)^\sigma\cong(SU(2)\times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2$,　$\boldsymbol{Z}_2=\{(E,1),(-E,-\sigma)\}$.

証明　写像 $\varphi: SU(2)\times Spin(12)\to(E_7)^\sigma$ を

$$\varphi(A,\beta)=\phi(A)\beta$$

で定義する．$SU(2)$, $Spin(12)$ の Lie 環 $\mathfrak{a}_1$, $(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ が $(\mathfrak{e}_7)^\sigma$ の ideal 直和成分である（命題4.21）から，$\mathfrak{a}_1$, $(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}$ は各元毎に可換である．よって $\phi(A)\in SU(2)$ と $\beta\in Spin(12)$ は可換である．よって φ は群準同型写像である．$(E_7)^\sigma$ は連結である（補題4.30）から φ の全射を示すには，その微分 $\varphi_*: \mathfrak{a}_1\oplus(\mathfrak{e}_7)^{\sigma,\kappa,\mu}\to(\mathfrak{e}_7)^\sigma$ の全射を示せばよいが，それを命題4.21が示している．Ker $\varphi=\{(E,1),(-E,\phi(-E)\}$（$\phi(-E)=-\sigma$ である（定理4.29））$=\{(E,1),(-E,-\sigma)\}=\boldsymbol{Z}_2$ は容易に分かる．よって Lie 群の同型 $(SU(2)\times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2\cong(E_7)^\sigma$ を得る．

9　E_7 の対合自己同型写像 $\lambda\gamma$ と部分群 $SU(8)/\boldsymbol{Z}_2$

C-線型写像 $\lambda\gamma: \mathfrak{P}^C\to\mathfrak{P}^C$，すなわち

$$\lambda\gamma(X,Y,\xi,\eta)=(\gamma Y,-\gamma X,\eta,-\xi)$$

を考え，E_7 の部分群

$$\begin{aligned}(E_7)^{\lambda\gamma}&=\{\alpha\in E_7\,|\,\lambda\gamma\alpha=\alpha\lambda\gamma\}\\&=\{\alpha\in E_7\,|\,\tau\gamma\alpha=\alpha\tau\gamma\}=(E_7)^{\tau\gamma}\end{aligned}$$

を調べよう．そのため，$\mathfrak{P}^C$ の $\boldsymbol{R}$-線型写像 $\tau\gamma$ による固有空間

$$\begin{aligned}(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}&=\{P\in\mathfrak{P}^C\,|\,\tau\gamma P=P\}\\&=\{(X,Y,\xi,\eta)\in\mathfrak{P}^C\,|\,X,Y\in(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma},\xi,\eta\in\boldsymbol{R}\},\\(\mathfrak{P}^C)_{-\tau\gamma}&=\{P\in\mathfrak{P}^C\,|\,\tau\gamma P=-P\}\\&=\{(X,Y,\xi,\eta)\in\mathfrak{P}^C\,|\,X,Y\in(\mathfrak{J}^C)_{-\tau\gamma},\xi,\eta\in i\boldsymbol{R}\}\\&=i(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}\end{aligned}$$

を考える $(E_6,\boldsymbol{7})$．$\mathfrak{P}^C=(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}\oplus(\mathfrak{P}^C)_{-\tau\gamma}$ であり，$(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}$, $(\mathfrak{P}^C)_{-\tau\gamma}$ は $(E_7)^{\tau\gamma}$ の作用で不変である．特に，$\mathfrak{P}^C$ は $(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}$ の複素化になっている：$\mathfrak{P}^C=((\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma})^C$.

E_6, **6** と同様の $\boldsymbol{R}$-線型写像 $k: M(4,\boldsymbol{H}) \to M(8,C)$ を用いる．群 $Sp(4)=\{D\in M(4,\boldsymbol{H})\,|\,D^*D=E\}$，$SU(8)=\{B\in M(8,C)\,|\,(\tau{}^tB)B=E, \det B=1\}$ に対して

$$k(Sp(4))=\{D\in SU(6)\,|\,JD=(\tau D)J\}$$

が成り立つ．これらの群の Lie 環

$$\mathfrak{sp}(4)=\{D\in M(4,\boldsymbol{H})\,|\,D^*=-D\},$$
$$\mathfrak{su}(8)=\{B\in M(8,C)\,|\,\tau{}^tB=-B, \mathrm{tr}(B)=0\}$$

の関係を調べておこう．

補題4.32 $\mathfrak{su}(8)$ の元 B は

$$B=kD+ikT, \qquad D\in\mathfrak{sp}(4),\ T\in\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0$$

と一意に表される．

証明 $B\in\mathfrak{su}(8)$ に対し，$D_1=\dfrac{B-J(\tau B)J}{2}$，$T_1=\dfrac{B+J(\tau B)J}{2i}\in M(4,C)$ とおくと

$$B=D_1+iT_1, \qquad \begin{array}{l}\tau{}^tD_1=-D_1,\ \ JD_1=(\tau D_1)J,\\ \tau{}^tT_1=T_1,\ \ JT_1=(\tau T_1)J,\ \ \mathrm{tr}(T_1)=0\end{array}$$

となる．そこで，$D=k^{-1}(D_1)$，$T=k^{-1}(T_1)\in M(4,\boldsymbol{H})$ とおくと D，T が求めるものである．一意性を示そう．$D_1+iT_1=0$，$D_1\in k(\mathfrak{sp}(4))$，$T_1\in k(\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0)$ とするとき，$JD_1+iJT_1=0$，$(\tau D_1)J+i(\tau T_1)J=0$，さらに $D_1J-iT_1J=0$，$D_1-iT_1=0$ となるので，初めの式と合せて，$D_1=0$，$T_1=0$ を得る．

以下，E_6, **7** で定義した C-同型写像 $g:\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})^C$，その制限である $\boldsymbol{R}$-同型写像 $g:(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}\to\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0$，$g(M+i\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M) & -\boldsymbol{a}\\ -\boldsymbol{a}^* & M-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M)E\end{pmatrix}$，および群準同型写像 $\varphi: Sp(4)\to(E_6)^{\tau\gamma}$，$\varphi(D)X=g^{-1}(D(gX)D^*)$，$X\in\mathfrak{J}^C$，その微分 $\varphi_*:\mathfrak{sp}(4)\to(\mathfrak{e}_6)^{\tau\gamma}$，$\varphi_*(D)X=g^{-1}(D(gX)+(gX)D^*)$ を用いる．

命題4.33 Lie 群 $(E_7)^{\tau\gamma}$ の Lie 環 $(\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$ は

$$\begin{aligned}(\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}&=\{\Phi\in\mathfrak{e}_7\,|\,\tau\gamma\Phi=\Phi\tau\gamma\}\\ &=\{\Phi(\phi,A,-\gamma A,0)\in\mathfrak{e}_7\,|\,\phi\in(\mathfrak{e}_6)^{\tau\gamma}, A\in(\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}\}\\ &=\{\Phi(\varphi_*(D),g^{-1}(T),-\gamma g^{-1}(T),0)\in\mathfrak{e}_7\,|\,D\in\mathfrak{sp}(4), T\in\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0\}\end{aligned}$$

である．

証明　容易である．

$E_{6,6}$ と同様に，C-ベクトル空間 $\mathfrak{S}(8, C)$ を

$$\mathfrak{S}(8, C)=\{S\in M(8, C)\mid {}^tS=-S\}$$

で定義し，C-同型写像 $k_J:\mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})^C\to\mathfrak{S}(8, C)$ を

$$k_J(M_1+iM_2)=(kM_1)J+i(kM_2)J, \qquad M_1, M_2\in\mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})$$

で定義する．

定義　($\mathfrak{S}(8, C)$ を $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間とみなして) $\boldsymbol{R}$-同型写像 $\chi:(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}\to\mathfrak{S}(8, C)$ を

$$\chi(X, Y, \xi, \eta)=k_J\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)+ik_J\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)$$

で定義し，その複素化写像 $\chi^C:\mathfrak{P}^C=((\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma})^C\to\mathfrak{S}(8, C)^C$ も同じ χ で表す．

命題4.34　Lie 環 $(\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$ は Lie 環 $\mathfrak{su}(8)$ に，対応 $\varphi_*:\mathfrak{su}(8)\to(\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$,

$$\varphi_*(B)P=\chi^{-1}(B(\chi P)+(\chi P)\,{}^tB), \qquad P\in\mathfrak{P}^C$$

で同型である．

証明　$B\in\mathfrak{su}(8)$ に対し，$\varphi_*(B)\in(\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$ となることを示そう．

(i)　$B=k(D)$, $D\in\mathfrak{sp}(4)$ のとき

$$\begin{aligned}
P&=(X, Y, \xi, \eta)\\
&\xrightarrow{\ \chi\ } k\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)J+ik\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)J\\
&\longrightarrow k(D)k\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)J+ik(D)k\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)J\\
&\qquad +k\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)J\,{}^tk(D)+ik\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)J\,{}^tk(D)\\
&=k\Big(D\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)\Big)J+ik\Big(D\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)\Big)J\\
&\qquad +k\Big(\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)D^*\Big)J+ik\Big(\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)D^*\Big)J\\
&=k(D(gX)+(gX)D^*)J+ik(D(g(\gamma Y)+g(\gamma Y))D^*)J
\end{aligned}$$

$$=k(g(\varphi_*(D)X))J+ik(g(\varphi_*(D)(\gamma Y)))J$$

$$=\chi\begin{pmatrix}\varphi_*(D)X\\ \gamma\varphi_*(D)\gamma Y\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\chi\left(\begin{pmatrix}\varphi_*(D) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \tau\varphi_*(D)\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)$$

$$=\chi(\varPhi(\varphi_*(D),0,0,0)P)$$

となる．よって $\varphi_*(k(D))=\varPhi(\varphi_*(D),0,0,0)\in(\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$ である．

(ii) $B=ik(T)$, $T\in\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0$ のとき．（$T=gA$, $A\in(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}$ とおく）

$$P=(X,\ Y,\xi,\eta)$$

$$\longrightarrow k\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)J+ik\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)J$$

$$\longrightarrow ik(T)k\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)J-k(T)k\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)J$$

$$+ik\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)J\,{}^tk(T)-k\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)J\,{}^tk(T)$$

$$=k(-Tg(\gamma Y)-g(\gamma Y)T+\eta T)J+ik(T(gX)+(gX)T-\xi T)J$$

$$=k(-2gA\circ g(\gamma Y)+\eta gA)T+ik(2gA\circ gX-\xi gA)J$$

$$=k\Big(-2g(\gamma A\times Y)-\frac{1}{2}(A,\ Y)E+\eta gA\Big)J$$

$$+ik\Big(2g(\gamma A\times\gamma X)+\frac{1}{2}(\gamma A,X)-\xi gA\Big)J\quad(\text{補題}3.23)$$

$$=\chi\begin{pmatrix}-2\gamma A\times Y+\eta A\\ 2A\times X-\xi\gamma A\\ (A,\ Y)\\ (-\gamma A,X)\end{pmatrix}=\chi\left(\begin{pmatrix}0 & -2\gamma A & 0 & A\\ 2A & 0 & -\gamma A & 0\\ 0 & A & 0 & 0\\ -\gamma A & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)$$

$$=\chi(\varPhi(0,A,-\gamma A,0)P)$$

となる．よって，$\varphi_*(ik(T))=\varPhi(0,A,-\gamma A,0)\in(\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$ である．

以上で $\varphi_*:\mathfrak{su}(8)\to(\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$ が定義された．φ_* の全単射は容易である．φ_* が Lie 環準同型写像であることを示さなければならないが，それは次の定理4.36より自明となるのでここでは省略する．

補題4.35 $(E_7)^{\tau\gamma}$ は連結である．

証明 $(E_7)^{\tau\gamma}$ は単連結 Lie 群 E_7 の対合自己同型写像 $\tau\gamma$ の固定点部分群として連結である．

定理4.36　$(E_7)^{\tau\gamma} \cong SU(8)/\boldsymbol{Z}_2,\ \ \boldsymbol{Z}_2=\{E, -E\}.$

証明　写像 $\varphi : SU(8) \to (E_7)^{\tau\gamma}$ を

$$\varphi(B)P=\chi^{-1}(B(\chi P)^tB), \qquad P \in \mathfrak{P}^C$$

で定義する．そのために，まず $\varphi(B) \in (E_7)^{\tau\gamma}$ を示さなければならないが，それは φ の微分 $\varphi_* : \mathfrak{su}(8) \to (\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$ が定義されている（命題4.34）ことよりよい．明らかに φ は群準同型写像である．$\varphi_* : \mathfrak{su}(8) \to (\mathfrak{e}_7)^{\tau\gamma}$ は全射であり，$(E_7)^{\tau\gamma}$ は連結である（補題4.35）から，$\varphi : SU(8) \to (E_7)^{\tau\gamma}$ も全射である（下の注意参照）．$\mathrm{Ker}\,\varphi=\{E, -E\}=\boldsymbol{Z}_2$ は容易である．よって Lie 群の同型 $SU(8)/\boldsymbol{Z}_2 \cong (E_7)^{\tau\gamma}$ を得る．

注意　$\varphi : SU(8) \to (E_7)^{\tau\gamma}$ の全射は（補題4.35を用いなくても）次のようにしても得られるので書いておく．

主張 1　$a \in \boldsymbol{R}$ に対して，補題4.12の $\alpha_i(a)$ は $\alpha_i(a) \in \varphi(SU(8))$ である．

証明　$\alpha_i(a)=\exp(\Phi(0, -aE_i, aE_i, 0)) \in \exp\varphi_*(\mathfrak{su}(8))=\varphi(\exp(\mathfrak{su}(8))) \subset \varphi(SU(8))$.

主張 2　任意の $P \in (\mathfrak{M}^C)_{\tau\gamma}=\{P \in \mathfrak{M}^C \mid \tau\gamma P=P\}$ は，ある $\alpha \in \varphi(SU(8))$ により，実対角線形に変形される：

$$\alpha P=(X, Y, \xi, \eta), \qquad X,\ Y \text{ は実対角線形},\ \xi>0.$$

証明　$P=(X, Y, \xi, \eta) \in (\mathfrak{M}^C)_{\tau\gamma}$ とする．$\xi \neq 0$ ならば

$$\tau\gamma Y=Y,\ \ X=\frac{1}{\xi}(Y \times Y),\ \ \tau\xi=\xi,\ \ \tau\eta=\eta$$

である．$Y \in (\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$，よって $\gamma Y \in (\mathfrak{J}^C)_{\tau\gamma}$ より $g(\gamma Y) \in \mathfrak{J}(4, \boldsymbol{H})_0$ となるから，ある $D \in Sp(4)$ により

$$D(g(\gamma Y))D^* : \text{実対角線形}$$

にできる．このとき

$$\gamma\varphi(D)\gamma Y=g^{-1}(D(g(\gamma Y))D^*) : \text{実対角線形},$$

$$\varphi(D)X=\varphi(D)\Big(\frac{1}{\xi}Y \times Y\Big)=\frac{1}{\xi}(\gamma\varphi(D)\gamma Y \times \gamma\varphi(D)\gamma Y) : \text{実対角線形}$$

にできる．$\xi=0$ のときも命題4.13と同様にすることにより，結局 P はある $\alpha \in \varphi(SU(8))$ により

$$\alpha P=(X, Y, \xi, \eta), \qquad X,\ Y \text{ は実対角線形},\ 0 \neq \xi \in \boldsymbol{R}$$

に変形される．$\xi<0$ のときは $\alpha_1(\pi)$（主張１）を施すと $\xi>0$ となる．

さて $\varphi : SU(8) \to (E_7)^{\tau\gamma}$ の全射を証明しよう．$\alpha \in (E_7)^{\tau\gamma}$ に対し，$P=\alpha\dot{1} \in (\mathfrak{M}^C)_{\tau\gamma}$ を考える．P をある $\beta \in \varphi(SU(8))$ で実対角化し（主張２），定理4.14と同様にすると

$$\alpha_1(a_1)^{-1}\alpha_2(a_2)^{-1}\alpha_3(a_3)^{-1}\beta\alpha\dot{1}=\dot{1}$$

にできる．ここに $a_i=\dfrac{\eta_i}{|\eta_i|}r_i$（$\eta_i$ は Y の対角成分）であるが，$\eta_i \in \boldsymbol{R}$ より $a_i \in \boldsymbol{R}$ となり $\alpha_i(a_i) \in \varphi(SU(8))$ である（主張１）．$\tilde{\alpha}=\alpha_1(a_1)^{-1}\alpha_2(a_2)^{-1}\alpha_3(a_3)^{-1}\beta\alpha$ とおくと，$\tilde{\alpha} \in E_6$ で（定理4.10）$\tau\gamma\alpha=\alpha\tau\gamma$ となっている．よって $\tilde{\alpha} \in (E_6)^{\tau\gamma} = \varphi(Sp(4))$（定理3.24）$\subset \varphi(SU(8))$ であるから，$\alpha=\beta^{-1}\alpha_3(a_3)\alpha_2(a_2)\alpha_1(a_1)\tilde{\alpha} \in \varphi(SU(8))$ である．以上で φ の全射が証明された．

10　$\mathfrak{e}_7{}^C$ の単純性

定理4.37　C-Lie 環 $\mathfrak{e}_7{}^C$ は単純である．したがって（$\mathfrak{e}_7$ の複素化が $\mathfrak{e}_7{}^C$ になることを後で（命題4.45）示すので）Lie 環 $\mathfrak{e}_7$ も単純である．

証明　$\mathfrak{e}_7{}^C=\mathfrak{e}_6{}^C \oplus \mathfrak{N}^C$, $\mathfrak{e}_6{}^C=\{\varPhi(\phi, 0, 0, 0) \in \mathfrak{e}_7{}^C \mid \phi \in \mathfrak{e}_6{}^C\}$, $\mathfrak{N}^C=\{\varPhi(0, A, B, \nu) \in \mathfrak{e}_7{}^C \mid A, B \in \mathfrak{J}^C, \nu \in C\}$ とおいて，$p : \mathfrak{e}_7{}^C \to \mathfrak{e}_6{}^C$，$q : \mathfrak{e}_7{}^C \to \mathfrak{N}^C$ を射影とする．さて，$\{0\} \neq \mathfrak{a}$ を $\mathfrak{e}_7{}^C$ の ideal とする．$p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{e}_6{}^C$ の ideal である．実際，$\phi \in p(\mathfrak{a})$ とすると，$\varPhi(0, A, B, \nu) \in \mathfrak{N}^C$ が存在して $\varPhi(\phi, A, B, \nu) \in \mathfrak{a}$ となる．任意の $\phi_1 \in \mathfrak{e}_6{}^C$ に対して

$$\mathfrak{a} \ni [\varPhi(\phi_1, 0, 0, 0), \varPhi(\phi, A, B, \nu)] = \varPhi([\phi_1, \phi], \phi_1 A, \phi_1{}' B, 0)$$

（定理4.5）となるので $[\phi_1, \phi] \in p(\mathfrak{a})$ である．

(1)　$\mathfrak{e}_6{}^C \cap \mathfrak{a}=\{0\}$, $\mathfrak{N}^C \cap \mathfrak{a}=\{0\}$ のとき（この場合は起らない）．$\mathfrak{N}^C \cap \mathfrak{a}=\{0\}$ であるから，$p|\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{e}_6{}^C$ は単射である．$\{0\} \neq p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{e}_6{}^C$ の ideal で，$\mathfrak{e}_6{}^C$ は単純である（定理3.26）から，$p(\mathfrak{a})=\mathfrak{e}_6{}^C$ である．よって $\dim_C \mathfrak{a}=\dim_C p(\mathfrak{a})=\dim_C \mathfrak{e}_6{}^C=78$ である．一方，$\mathfrak{e}_6{}^C \cap \mathfrak{a}=\{0\}$ であるから，$q|\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{N}^C$ も単射である．よって $\dim_C \mathfrak{a} \leqq \dim_C \mathfrak{N}^C=27 \times 2+1=55$ となり，上記に矛盾する．

(2) $\mathfrak{e}_6{}^C\cap\mathfrak{a}\neq\{0\}$ のとき．$\mathfrak{e}_6{}^C$ は単純であるから $\mathfrak{e}_6{}^C\cap\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_6{}^C$ となり，$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{e}_6{}^C$ である．一方

$$\mathfrak{a}\supset[\mathfrak{a},\mathfrak{e}_7{}^C]\supset[\Phi(\mathfrak{e}_6{}^C,0,0,0),\Phi(0,\mathfrak{J}^C,0,0)]$$
$$=\Phi(0,\mathfrak{e}_6{}^C\mathfrak{J}^C,0,0)=\Phi(0,\mathfrak{J}^C,0,0)\ (\text{定理3.27})$$

となる．同様に $\Phi(0,0,\mathfrak{J}^C,0)\subset\mathfrak{a}$ となる．さらに

$$\mathfrak{a}\ni[\Phi(0,E_1,0,0),\Phi(0,0,E_1,0)]=\Phi(2E_1\vee E_1,0,0,1)$$

より $\Phi(0,0,0,1)\in\mathfrak{a}$ となり，$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{N}^C$ となる．よって $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{e}_6{}^C\oplus\mathfrak{N}^C=\mathfrak{e}_7{}^C$ となり $\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_7{}^C$ を得る．

(3) $\mathfrak{N}^C\cap\mathfrak{a}\neq\{0\}$ のとき．$0\neq\Phi(0,A,B,\nu)\in\mathfrak{N}^C\cap\mathfrak{a}$ をとる．

(i) $\Phi(0,A,B,\nu)$，$A\neq0$ のとき．$A\vee B_1\neq0$ なる $B_1\in\mathfrak{J}^C$ をとり（補題3.35），さらに $\phi\in\mathfrak{e}_6{}^C$ を $[A\vee B_1,\phi]\neq0$ のようにとる．($\mathfrak{e}_6{}^C$ は単純であるから，$\mathfrak{e}_6{}^C$ の中心は 0 のみである．よってこのような ϕ は存在する)．

$$\mathfrak{a}\ni\left[\Phi(0,A,B,\nu),\Phi\left(0,0,0,-\frac{3}{2}\right)\right]=\Phi(0,A,-B,0),$$
$$\mathfrak{a}\ni[\Phi(0,A,-B,0),\Phi(0,0,B_1,0)]=\Phi(2A\vee B_1,0,0,(A,B_1)),$$
$$\mathfrak{a}\ni[\Phi(2A\vee B_1,0,0,(A,B_1)),\Phi(\phi,0,0,0)]=\Phi(2[A\vee B_1,\phi],0,0,0)$$

となり (2) に帰着される．

(ii) $\Phi(0,A,B,\nu)$，$B\neq0$ のときも (i) と同様である．

(iii) $\Phi(0,0,0,\nu)$，$\nu\neq0$ のとき．$0\neq A\in\mathfrak{J}^C$ をとると

$$\mathfrak{a}\ni[\Phi(0,0,0,\nu),\Phi(0,A,0,0)]=\Phi\left(0,\frac{2}{3}\nu A,0,0\right)$$

となり (i) に帰着される．

以上で $\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_7{}^C$ となり，$\mathfrak{e}_7{}^C$ の単純性が示された．

定理4.38 (1) $\mathfrak{P}^C$ は $\mathfrak{e}_7{}^C$-既約 C-加群である．

(2) $\mathfrak{e}_7{}^C\mathfrak{P}^C=\{\sum_i\Phi_iP_i\mid\Phi_i\in\mathfrak{e}_7{}^C,P_i\in\mathfrak{P}^C\}=\mathfrak{P}^C$．

証明 (1) $\{0\}\neq W$ を $\mathfrak{P}^C$ の $\mathfrak{e}_7{}^C$-不変部分 C-加群とする．$(0,0,0,1)\in W$ ならば $W=\mathfrak{P}^C$ を示そう．実際，

$$W\ni\Phi(0,X,0,0)(0,0,0,1)=(X,0,0,0),$$
$$W\ni\Phi(0,E_2,0,0)(E_3,0,0,0)=(0,E_1,0,0),$$
$$W\ni\Phi(0,E_1,0,0)(0,E_1,0,0)=(0,0,1,0),$$
$$W\ni\Phi(0,0,Y,0)(0,0,1,0)=(0,Y,0,0)$$

より，$W=\mathfrak{P}^C$ となる．さて，$0\neq P=(X, Y, \xi, \eta)\in W$ をとる．

(i) $P=(X, Y, \xi, \eta)$，$X\neq 0$ のとき． (a)

$$W\ni \Phi(0,0,0,3)(X, Y, \xi, \eta)=(-X, Y, 3\xi, -3\eta), \quad \text{(b)}$$

$$W\ni \Phi(0,0,0,3)(-X, Y, 3\xi, -3\eta)=(X, Y, 9\xi, 9\eta). \quad \text{(c)}$$

(a)−(b)より $(X, 0, -\xi, 2\eta)\in W$，(a)−(c)より $(0, 0, \xi, \eta)\in W$ となり，結局，$(X, 0, 0, 3\eta)\in W$ が分かる．さらに $(X_1, X)\neq 0$ となる $X_1\in\mathfrak{J}^C$ をとると

$$W\ni \Phi(0,0,X_1,0)(X,0,0,3\eta)=(0,0,0,(X_1, X))$$

より $(0,0,0,1)\in W$ となり，上記より $W=\mathfrak{P}^C$ を得る．

(ii) $P=(0, Y, \xi, \eta)$，$Y\neq 0$ のとき．$B\times Y\neq 0$ となる $B\in\mathfrak{J}^C$ をとると

$$W\ni \Phi(0,0,B,0)(0, Y, \xi, \eta)=(2B\times Y, \xi B, 0, 0)$$

となり (i) に帰着される．

(iii) $P=(0,0,\xi,\eta)$，$\xi\neq 0$ のとき．$0\neq B\in\mathfrak{J}^C$ に対し

$$W\ni \Phi(0,0,B,0)(0,0,\xi,\eta)=(0, \xi B, 0, 0)$$

となり (ii) に帰着される．

以上で $W=\mathfrak{P}^C$ が示された．

(2) $\mathfrak{e}_7{}^C\mathfrak{P}^C$ は $\mathfrak{P}^C$ の $\mathfrak{e}_7{}^C$-不変 C-部分加群であるから，(1)より $\mathfrak{e}_7{}^C\mathfrak{P}^C=\mathfrak{P}^C$ となる．

補題4.39 $\mathfrak{e}_7{}^C$ の元 Φ は $\Phi=\sum_i P_i\times Q_i$，$P_i, Q_i\in\mathfrak{P}^C$ と表される．

証明 命題4.6の $[\Phi, P\times Q]=\Phi P\times Q+P\times\Phi Q$ は $\mathfrak{a}=\{\sum_i P_i\times Q_i \mid P_i, Q_i\in\mathfrak{P}^C\}$ が $\mathfrak{e}_7{}^C$ の ideal であることを示している．$\mathfrak{e}_7{}^C$ は単純である (定理4.37) から $\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_7{}^C$ である．

11 $\mathfrak{e}_7{}^C$ の Killing 形式

定義 $\mathfrak{e}_7{}^C$ に内積 $(\Phi_1, \Phi_2)_7$ を

$$(\Phi_1, \Phi_2)_7=-2(\phi_1, \phi_2)_6-4(A_1, B_2)-4(A_2, B_1)-\frac{8}{3}\nu_1\nu_2$$

$(\Phi_i=\Phi(\phi_i, A_i, B_i, \nu_i)\in\mathfrak{e}_7{}^C)$ で定義する．

補題4.40 (1) $\mathfrak{e}_7{}^C$ の内積 $(\Phi_1, \Phi_2)_7$ は $\mathfrak{e}_7{}^C$-不変である：

$$([\Phi,\Phi_1],\Phi_2)_7+(\Phi_1,[\Phi,\Phi_2])_7=0,\qquad \Phi,\Phi_i\in\mathfrak{e}_7{}^C.$$

(2)　$\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$，$P,Q\in\mathfrak{P}^C$ に対し

$$(\Phi,P\times Q)_7=\{\Phi P,Q\}$$

が成り立つ．

証明　(1)　$([\Phi,\Phi_1],\Phi_2)_7$

$$=\left(\Phi\begin{pmatrix}[\phi,\phi_1]+2A\vee B_1-2A_1\vee B\\ \left(\phi+\dfrac{2}{3}\nu\right)A_1-\left(\phi_1+\dfrac{2}{3}\nu_1\right)A\\ \left(\phi'-\dfrac{2}{3}\nu\right)B_1-\left(\phi_1{}'-\dfrac{2}{3}\nu_1\right)B\\ (A,B_1)-(B,A_1)\end{pmatrix},\ \Phi\begin{pmatrix}\phi_2\\ A_2\\ B_2\\ \nu_2\end{pmatrix}\right)_7$$

$=\cdots$（$[\phi,A\vee B]=\phi A\vee B+A\vee\phi' B$（補題3.31）等を用いる）$\cdots$

$=-(\Phi_1,[\Phi,\Phi_2])_7.$

(2)　実際に計算することにより確かめられる（計算略）．

定理4.41　$\mathfrak{e}_7{}^C$ の killing 形式 B_7 は

$$\begin{aligned}B_7(\Phi_1,\Phi_2)&=-9(\Phi_1,\Phi_2)_7\\&=18(\phi_1,\phi_2)_6+36(A_1,B_2)+36(A_2,B_1)+24\nu_1\nu_2\\&=\frac{3}{2}B_6(\phi_1,\phi_2)+36(A_1,B_2)+36(A_2,B_1)+24\nu_1\nu_2\\&=3\,\mathrm{tr}(\Phi_1\Phi_2)\end{aligned}$$

（$\Phi_i=\Phi(\phi_i,A_i,B_i,\nu_i)\in\mathfrak{e}_7{}^C$）で与えられる．

証明　$\mathfrak{e}_7{}^C$ は単純である（定理4.37）から，$\kappa,\kappa'\in C$ が存在して

$$B_7(\Phi_1,\Phi_2)=\kappa(\Phi_1,\Phi_2)_7=\kappa'\mathrm{tr}(\Phi_1\Phi_2),\quad \Phi_i\in\mathfrak{e}_7{}^C$$

となる（補題4.40，［3］命題12.3）．κ，κ' を求めるために $\Phi_1=\Phi_2=\Phi(0,0,0,1)\,(=\Phi_0)$ とおく．

$$(\Phi_0,\Phi_0)_7=-\frac{8}{3}$$

である．一方

$$\begin{aligned}[\Phi_0,[\Phi_0,\Phi(\phi,A,B,\nu)]]&=\left[\Phi_0,\Phi\left(0,\frac{2}{3}A,-\frac{2}{3}B,0\right)\right]\\&=\Phi\left(0,\frac{4}{9}A,\frac{4}{9}B,0\right)\end{aligned}$$

となるから

$$B_7(\Phi_0, \Phi_0)=\frac{4}{9}\times 27\times 2=24$$

となる．よって $\kappa=-9$ である．次に

$$\Phi_0\Phi_0(X, Y, \xi, \eta)=\Phi_0\left(-\frac{X}{3}, \frac{Y}{3}, \xi, -\eta\right)=\left(\frac{X}{9}, \frac{Y}{9}, \xi, \eta\right)$$

となるから

$$\mathrm{tr}(\Phi_0{}^2)=\frac{1}{9}\times 27\times 2+1+1=8$$

となる．よって $\kappa'=3$ である．

補題4.42 $0\neq P\in\mathfrak{P}^C$ ならば $P\times Q\neq 0$ なる $Q\in\mathfrak{P}^C$ が存在する．

証明 すべての $Q\in\mathfrak{P}^C$ に対して $P\times Q=0$ とすると，任意の $\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ に対し $0=(\Phi, P\times Q)_7=(\Phi, Q\times P)_7=\{\Phi Q, P\}$ (補題4.40) となる．$\mathfrak{e}_7{}^C\mathfrak{P}^C=\mathfrak{P}^C$ (定理4.38) より $\{\mathfrak{P}^C, P\}=0$ となり $P=0$ を得る．

12 $\mathfrak{e}_7{}^C$ の root 系

定理4.43 Lie 環 $\mathfrak{e}_7{}^C$ の階数は 7 である．$\mathfrak{e}_7{}^C$ の (ある Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に関する) root 系は

$$\pm(\lambda_k-\lambda_l),\quad \pm(\lambda_k+\lambda_l),\quad 0\leqq k<l\leqq 3,$$

$$\pm\lambda_k\pm\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3),\quad 0\leqq k\leqq 3,$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),$$

$$\pm\left(\mu_j+\frac{2}{3}\nu\right),\quad 1\leqq j\leqq 3,$$

$$\pm\lambda_k\pm\left(\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu\right),\quad 0\leqq k\leqq 3,$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu\right),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu\right),$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu\right),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu\right),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu\right),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu\right),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu\right),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu\right)$$

$(\mu_1+\mu_2+\mu_3=0)$ である.

証明　　$\mathfrak{e}_7{}^C=\mathfrak{e}_6{}^C\oplus\mathfrak{J}^C\oplus\mathfrak{J}^C\oplus C$

の分解（定理4.5）を用いる.

$$\mathfrak{h}=\left\{ h=\Phi(h_\delta+\widetilde{H},0,0,\nu)\in\mathfrak{e}_7{}^C \;\middle|\; \begin{array}{l} h_\delta=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k=-\sum_{k=0}^{3}\lambda_k iG_{k4+k} \\ H=\sum_{j=0}^{3}\mu_j E_j,\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=0 \\ \nu,\lambda_k,\mu_j\in C \end{array} \right\}$$

は $\mathfrak{e}_7{}^C$ の可換な部分 Lie 環である（さらに $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{e}_7{}^C$ の Cartan 部分環になる）.

I　$\mathfrak{e}_6{}^C$ の root は $\mathfrak{e}_7{}^C$ の root である. 実際, α を $\mathfrak{e}_6{}^C$ の root, $S\in\mathfrak{e}_6{}^C$ $(\subset\mathfrak{e}_7{}^C)$ をその root ベクトルとするとき

$$\begin{aligned}[h,S]&=[\Phi(h_\delta+\widetilde{H},0,0,\nu),\Phi(S,0,0,0)]\\&=\Phi([h_\delta+\widetilde{H},S],0,0,0)\\&=\Phi(\alpha(h_\delta+\widetilde{H})S,0,0,0)=\alpha(h)S\end{aligned}$$

となるからである.

II　$[\Phi(h_\delta+\widetilde{H},0,0,\nu),\Phi(0,E_j,0,0)]$

$$=\Phi\left(0,\left(h_\delta+\widetilde{H}+\frac{2}{3}\nu\right)E_j,0,0\right)=\left(\mu_j+\frac{2}{3}\nu\right)\Phi(0,E_j,0,0),$$

$[\Phi(h_\delta+\widetilde{H},0,0,\nu),\Phi(0,0,E_j,0)]$

$$=\Phi\left(0,0,\left(h_\delta-\widetilde{H}-\frac{2}{3}\nu\right)E_j,0\right)=\left(-\mu_j-\frac{2}{3}\nu\right)\Phi(0,0,E_j,0)$$

より $\pm\left(\mu_j+\dfrac{2}{3}\nu\right)$ が $\mathfrak{e}_7{}^C$ の root であることが分かる.

III　$[\Phi(h_\delta+\widetilde{H},0,0,\nu),\Phi(0,F_1(a),0,0)]$　　$a=e_k\pm ie_{4+k}$

$$=\Phi\left(0,\left(h_\delta+\widetilde{H}+\frac{2}{3}\nu\right)F_1(a),0,0\right)$$

$$=\varPhi\Big(0,\ F_1(h_\delta a)+\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_3)F_1(a)+\frac{2}{3}\nu F_1(a),\ 0,\ 0\Big)$$

$$=\Big(\pm\lambda_k-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu\Big)\varPhi(0,\ F_1(a),\ 0,\ 0)$$

より $\pm\lambda_k-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu$ が $\mathfrak{e}_7{}^C$ の root であることが分かる．残りの root も同様にして求められる（定理3.39の νh_δ，πh_δ 参照）．

定理4.44 $\mathfrak{e}_7{}^C$ の root 系（定理4.43）において

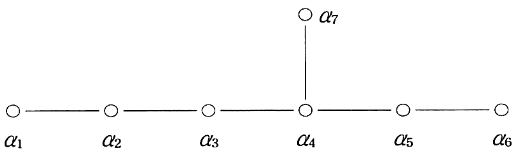
$$\alpha_1=\lambda_0-\lambda_1,\quad \alpha_2=\lambda_1-\lambda_2,\quad \alpha_3=\lambda_2-\lambda_3,$$

$$\alpha_4=\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1),$$

$$\alpha_5=\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2),$$

$$\alpha_6=\mu_2+\frac{2}{3}\nu,\quad \alpha_7=-\mu_3-\frac{2}{3}\nu$$

は基本 root 系であり，$\mathfrak{e}_7{}^C$ の Dynkin 図形は



となる．

証明 以下 root $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_7\alpha_7$ を略して $n_1n_2\cdots n_7$ で表すことにする．

$\lambda_0-\lambda_1=$	1	0	0	0	0	0	0	$\lambda_0+\lambda_1=$	1	2	2	2	2	1	1
$\lambda_0-\lambda_2=$	1	1	0	0	0	0	0	$\lambda_0+\lambda_2=$	1	1	2	2	2	1	1
$\lambda_0-\lambda_3=$	1	1	1	0	0	0	0	$\lambda_0+\lambda_3=$	1	1	1	2	2	1	1
$\lambda_1-\lambda_2=$	0	1	0	0	0	0	0	$\lambda_1+\lambda_2=$	0	1	2	2	2	1	1
$\lambda_1-\lambda_3=$	0	1	1	0	0	0	0	$\lambda_1+\lambda_3=$	0	1	1	2	2	1	1
$\lambda_2-\lambda_3=$	0	0	1	0	0	0	0	$\lambda_2+\lambda_3=$	0	0	1	2	2	1	1

$$\lambda_0+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1$$

$$\lambda_1+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1$$

$$\lambda_2+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)= 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$\lambda_3+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)= 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$\lambda_0-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)= 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0$$

$$\lambda_1-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)= 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0$$

$$\lambda_2-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)= 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0$$

$$\lambda_3-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)= 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= 1\quad 2\quad 3\quad 3\quad 2\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= 1\quad 1\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= 1\quad 2\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)= 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= 1\quad 1\quad 2\quad 2\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= 1\quad 1\quad 1\quad 2\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\ \ \lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= 1\quad 2\quad 2\quad 2\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= 0\quad 1\quad 1\quad 2\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)= 0\quad 1\quad 2\quad 2\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 3\quad 2\quad 2$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=0\quad 0\quad 1\quad 2\quad 1\quad 1\quad 1$$

$$-\mu_1-\frac{2}{3}\nu=1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 2\quad 1\quad 2$$

$$\mu_2+\frac{2}{3}\nu=0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0$$

$$-\mu_3-\frac{2}{3}\nu=0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1$$

$$\lambda_0-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu=1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0$$

$$\lambda_1-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu=0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0$$

$$\lambda_2-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu=0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0$$

$$\lambda_3-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu=0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0$$

$$\lambda_0+\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu=1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1$$

$$\lambda_1+\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu=0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1$$

$$\lambda_2+\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu=0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1$$

$$\lambda_3+\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu=0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu=0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu=1\quad 2\quad 3\quad 3\quad 2\quad 1\quad 2$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu=0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1\quad 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu=1\quad 1\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1\quad 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu=1\quad 2\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1\quad 2$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu=0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu=1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3+\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 2$$

$$\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

と表せるから $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$ は基本 root 系である．$h=\Phi\left(\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k + \sum_{j=1}^{3}\mu_j\widetilde{E}_j, 0, 0, \nu\right)$, $h'=\Phi\left(\sum_{k=0}^{3}\lambda_k' H_k+\sum_{j=1}^{3}\mu_j'\widetilde{E}_j, 0, 0, \nu'\right)\in\mathfrak{h}$ に対し，Killing 形式 B_7 の値は

$$B_7(h, h')=6\left(6\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k'+3\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mu_j'+4\nu\nu'\right)$$

となる．実際，定理4.41より，

$$B_7(h, h')=\frac{3}{2}B_6\left(\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k+\sum_{j=1}^{3}\mu_j\widetilde{E}_j, \sum_{j=0}^{3}\lambda_k' H_k+\sum_{j=1}^{3}\mu_j'\widetilde{E}_j\right)+24\nu\nu'$$

$$=\frac{3}{2}12\left(2\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k'+\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mu_j'\right)\ (\text{定理3.40})\ +24\nu\nu'$$

$$=6\left(6\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k'+3\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mu_j'+4\nu\nu'\right)$$

である．これより，root $\alpha_1, \cdots, \alpha_7$ に対応する元 $H_{\alpha_1}, \cdots, H_{\alpha_7}\in\mathfrak{h}$ $(B_7(H_\alpha, H)=\alpha(H),\ H\in\mathfrak{h})$ は

$$H_{\alpha_1}=\frac{1}{36}\Phi(H_0-H_1, 0, 0, 0),\quad H_{\alpha_2}=\frac{1}{36}\Phi(H_1-H_2, 0, 0, 0),$$

$$H_{\alpha_3}=\frac{1}{36}\Phi(H_2-H_3, 0, 0, 0),$$

$$H_{\alpha_4}=\frac{1}{72}\Phi((-H_0-H_1-H_2+H_3)+2(\widetilde{E}_3-\widetilde{E}_1),\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$H_{\alpha_5}=\frac{1}{72}\Phi((H_0+H_1+H_2+H_3)+2(\widetilde{E}_1-\widetilde{E}_2),\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$H_{\alpha_6}=\frac{1}{54}\Phi\Big((-\widetilde{E}_1+2\widetilde{E}_2-\widetilde{E}_3), 0, 0, \frac{3}{2}\Big),$$

$$H_{\alpha_7}=\frac{1}{54}\Phi\Big((\widetilde{E}_1+\widetilde{E}_2-2\widetilde{E}_3), 0, 0, -\frac{3}{2}\Big)$$

となる．よって

$$(\alpha_1, \alpha_1)=B_7(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_1})=36\frac{1}{36}\frac{1}{36}2=\frac{1}{18}$$

となる．同様にして

$$(\alpha_i, \alpha_i)=\frac{1}{18},\quad i=2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2)=(\alpha_2, \alpha_3)=(\alpha_3, \alpha_4)=(\alpha_4, \alpha_5)=(\alpha_4, \alpha_7)=(\alpha_5, \alpha_6)=-\frac{1}{36},$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)=0,\ \text{その他}$$

となる．これより容易に Dynkin 図形を描くことができる．

13　単連結複素 Lie 群 $E_7{}^C$

命題4.45　Lie 環 $\mathfrak{e}_7$ の複素化は $\mathfrak{e}_7{}^C$ である．

証明　$\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ に対し，Φ の内積 $\langle P, Q\rangle$ に関する共役転置写像 Φ^* は $\Phi^*=\tau\lambda\Phi\lambda\tau\in\mathfrak{e}_7{}^C$ であり，$\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ が $\mathfrak{e}_7$ に属するための必要十分条件は $\Phi^*=-\Phi$ である．さて，$\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ は

$$\Phi=\frac{\Phi-\Phi^*}{2}+i\frac{\Phi+\Phi^*}{2i},\qquad \frac{\Phi-\Phi^*}{2},\ \frac{\Phi+\Phi^*}{2i}\in\mathfrak{e}_7$$

と表されるので，$\mathfrak{e}_7{}^C$ は $\mathfrak{e}_7$ の複素化である．

定理4.46　Lie 群 $E_7{}^C$ の極分解は

$$E_7{}^C\simeq E_7\times\boldsymbol{R}^{133}$$

で与えられる．したがって，$E_7{}^C$ は単連結な E_7 型複素 Lie 群である．

証明　$E_7{}^C$ は $\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)=GL(56, C)$ の代数部分群であり，$\alpha\in E_7{}^C$ ならば，

α の内積 $\langle P, Q\rangle$ に関する共役転置写像 α^* は，$\alpha^*=\tau\lambda\alpha^{-1}\lambda^{-1}\tau\in E_7{}^C$ である．よって Chevalley の補題（[3]定理6.3）より

$$E_7{}^C\simeq(E_7{}^C\cap U(\mathfrak{P}^C))\times \boldsymbol{R}^d=E_7\times\boldsymbol{R}^d,\quad d=133$$

となる．E_7 は単連結である（定理4.16）から，$E_7{}^C$ も単連結である．$E_7{}^C$ の Lie 環は $\mathfrak{e}_7{}^C$ であるから，結局，$E_7{}^C$ は単連結 E_7 型複素 Lie 群であることが分かった．

付録14　E_7 の位数 3 の自己同型写像 w と部分群 $(SU(3)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3$

$w\in G_2$ を $w\in G_2\subset F_4\subset E_6\subset E_7$ とみなし，E_7 の部分群

$$(E_7)^w=\{\alpha\in E_7\,|\,w\alpha=\alpha w\}$$

を調べよう．

定理4.47　$(E_7)^w\cong(SU(3)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_3=\{(E,E),(\omega E,\omega E),(\omega^2E,\omega^2E)\}$，$1\neq\omega\in\boldsymbol{C}$，$\omega^3=1$．

証明　(I. Yokota - T. Ishihara - O. Yasukura, Subgroup $((SU(3)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3)\cdot\boldsymbol{Z}_2$ of the simply connected compact simple Lie group E_7, J. Math. Kyoto Univ., **23** (1983) をみて下さい)．

付録15　非 compact E_7 型例外 Lie 群 $E_{7(7)}$，$E_{7(-5)}$，$E_{7(-25)}$

$$\mathfrak{P}=\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})\oplus\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C})\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R},$$
$$\mathfrak{P}'=\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C}')\oplus\mathfrak{J}(3,\mathfrak{C}')\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$$

とし，$P, Q\in\mathfrak{P}$（または $\mathfrak{P}'$）に対し，$\boldsymbol{R}$-線型写像 $P\times Q:\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$（または $\mathfrak{P}'\to\mathfrak{P}'$）を $\mathfrak{P}^C$ におけると同様に定義しておく．また $\mathfrak{P}^C$ に Hermite 内積 $\langle P, Q\rangle_\sigma$ を

$$\langle P, Q\rangle_\sigma=\langle\sigma P, Q\rangle$$

で定義する．さて，群 $E_{7(7)}$，$E_{7(-5)}$，$E_{7(-25)}$ を

$$E_{7(7)}=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{P}')\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q\},$$
$$E_{7(-5)}=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{P}^C)\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q, \langle\alpha P,\alpha Q\rangle_\sigma=\langle P, Q\rangle_\sigma\},$$
$$E_{7(-25)}=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{P})\,|\,\alpha(P\times Q)\alpha^{-1}=\alpha P\times\alpha Q\}$$

で定義する．これらの群は

$$E_{7(7)}=(E_7{}^C)^{\tau\gamma},\quad E_{7(-5)}=(E_7{}^C)^{\tau\lambda\sigma},\quad E_{7(-25)}=(E_7{}^C)^{\tau}$$

と定義してもよい．

定理4.48 Lie 群 $E_{7(7)}$，$E_{7(-5)}$，$E_{7(-25)}$ の極分解はそれぞれ

$$E_{7(7)}\simeq SU(8)/\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{R}^{70},$$
$$E_{7(-5)}\simeq(SU(2)\times Spin(12))/\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{R}^{64},$$
$$E_{7(-25)}\simeq(U(1)\times E_6)/\boldsymbol{Z}_3\times\boldsymbol{R}^{54}$$

で与えられる．

証明 それぞれ定理4.36，定理4.31，定理4.17に対応する事実である．

定理4.49 中心 $z(E_{7(7)})$，$z(E_{7(-5)})$，$z(E_{7(-25)})$ はいずれも $\{1,-1\}$ である．

V. 例外型単純 Lie 群 E_8

1 Lie 環 $\mathfrak{e}_8{}^C$

定義 248次元 C-ベクトル空間

$$\mathfrak{e}_8{}^C = \mathfrak{e}_7{}^C \oplus \mathfrak{P}^C \oplus \mathfrak{P}^C \oplus C \oplus C \oplus C$$

において，Lie 積 $[R_1, R_2]$ を

$$[(\Phi_1, P_1, Q_1, r_1, s_1, t_1), (\Phi_2, P_2, Q_2, r_2, s_2, t_2)] = (\Phi, P, Q, r, s, t)$$

$$\begin{cases} \Phi = [\Phi_1, \Phi_2] + P_1 \times Q_2 - P_2 \times Q_1, \\ P = \Phi_1 P_2 - \Phi_2 P_1 + r_1 P_2 - r_2 P_1 + s_1 Q_2 - s_2 Q_1, \\ Q = \Phi_1 Q_2 - \Phi_2 Q_1 - r_1 Q_2 + r_2 Q_1 + t_1 P_2 - t_2 P_1, \\ r = -\dfrac{1}{8}\{P_1, Q_2\} + \dfrac{1}{8}\{P_2, Q_1\} + s_1 t_2 - s_2 t_1, \\ s = \dfrac{1}{4}\{P_1, P_2\} + 2r_1 s_2 - 2r_2 s_1, \\ t = -\dfrac{1}{4}\{Q_1, Q_2\} - 2r_1 t_2 + 2r_2 t_1 \end{cases}$$

で定義すると，$\mathfrak{e}_8{}^C$ は C-Lie 環になる．

証明 Lie 環の定義のうち，$[R_1, R_2 + R_3] = [R_1, R_2] + [R_1, R_3]$，$[\kappa R_1, R_2] = \kappa[R_1, R_2]$，$\kappa \in C$，$[R_1, R_2] = -[R_2, R_1]$ は明らかであるが，Jacobi 恒等式を証明しなければならない．それは

$$[R_1, [R_2, R_3]] + [R_2, [R_3, R_1]] + [R_3, [R_1, R_2]]$$

$= \cdots$($[\Phi, P \times Q] = \Phi P \times Q + P \times \Phi Q$ (命題4.6)，$(P \times R)Q - (Q \times R)P + \dfrac{1}{8}\{Q, R\}P - \dfrac{1}{8}\{P, R\}Q - \dfrac{1}{4}\{P, Q\}R = 0$ (補題4.1(3))，$\{\Phi P, Q\} + \{P, \Phi Q\} = 0$ (命題4.4(2)) 等を用いる)$\cdots$

$= 0$

となることが実際の計算によって確かめられる．

C-線型写像 $\lambda, \omega : \mathfrak{e}_8{}^C \to \mathfrak{e}_8{}^C$ をそれぞれ

$$\lambda(\Phi, P, Q, r, s, t) = (\lambda\Phi\lambda^{-1}, \lambda P, \lambda Q, r, s, t)$$

(右辺の λ は E_7, **3** で定義された $\lambda \in E_7$ である)

$$\omega(\Phi, P, Q, r, s, t) = (\Phi, Q, -P, -r, -t, -s)$$

で定義する．λ, ω は $\mathfrak{e}_8{}^C$ の Lie 積を保っている：$\lambda, \omega \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{e}_8{}^C)$ である．さらに

$$\tilde{\lambda} = \lambda\omega = \omega\lambda$$

とおく．なお，$\mathfrak{e}_8{}^C$ における複素共役を τ で表わす：

$$\tau(\Phi, P, Q, r, s, t) = (\tau\Phi\tau, \tau P, \tau Q, \tau r, \tau s, \tau t).$$

定義　$\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{e}_8$ を

$$\mathfrak{e}_8 = \{ R \in \mathfrak{e}_8{}^C \mid \tau\tilde{\lambda} R = R \}$$

で定義する．

証明　$\mathfrak{e}_8$ が $\boldsymbol{R}$-Lie 環であることは，$\tilde{\lambda} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{e}_8{}^C)$ と $\tau[R_1, R_2] = [\tau R_1, \tau R_2]$ のことから分かる．

定理5.1　Lie 環 $\mathfrak{e}_8$ は

$$\mathfrak{e}_8 = \{ (\Phi, \tau\lambda Q, Q, r, s, -\tau s) \mid \Phi \in \mathfrak{e}_7, Q \in \mathfrak{P}^C, r \in i\boldsymbol{R}, s \in C \}$$

である．

証明　$R = (\Phi, P, Q, r, s, t) \in \mathfrak{e}_8{}^C$ に対し $\tau\tilde{\lambda} R = (\tau\lambda\Phi\lambda^{-1}\tau, \tau\lambda Q, -\tau\lambda P, -\tau r, -\tau t, -\tau s)$ である．$\tau\tilde{\lambda} R = R$ の条件は，$\tau\lambda\Phi = \Phi\lambda\tau$, $\tau\lambda Q = P$, $\tau r = -r$, $t = -\tau s$ であるから定理を得る．

2　$\mathfrak{e}_8{}^C$ の単純性

$\mathfrak{e}_8{}^C$ において，

$$\Phi = (\Phi, 0, 0, 0, 0, 0), \qquad P^- = (0, P, 0, 0, 0, 0),$$
$$Q_- = (0, 0, Q, 0, 0, 0), \qquad r = (0, 0, 0, r, 0, 0),$$
$$s^- = (0, 0, 0, 0, s, 0), \qquad t_- = (0, 0, 0, 0, 0, t)$$

の記号を用いる．

定理5.2　C-Lie 環 $\mathfrak{e}_8{}^C$ は単純である．したがって（$\mathfrak{e}_8$ の複素化が $\mathfrak{e}_8{}^C$ になっていることを後で（命題5.16）示すので）Lie 環 $\mathfrak{e}_8$ も単純である．

証明　$\mathfrak{e}_8{}^C=\mathfrak{e}_7{}^C\oplus\mathfrak{R}^C$, $\mathfrak{R}^C=\mathfrak{P}^C\oplus\mathfrak{P}^C\oplus C\oplus C\oplus C$ とおいて，$p:\mathfrak{e}_8{}^C\to\mathfrak{e}_7{}^C$, $q:\mathfrak{e}_8{}^C\to\mathfrak{R}^C$ を射影とする．さて，$\{0\}\neq\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{e}_8{}^C$ の ideal とする．$p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{e}_7{}^C$ の ideal である．実際，$\Phi\in p(\mathfrak{a})$ とすると，$(0,P,Q,r,s,t)\in\mathfrak{R}^C$ が存在して $(\Phi,P,Q,r,s,t)\in\mathfrak{a}$ となる．任意の $\Phi_1\in\mathfrak{e}_7{}^C$ に対して

$$\mathfrak{a}\ni[\Phi_1,(\Phi,P,Q,r,s,t)]=([\Phi_1,\Phi],\Phi_1P,\Phi_1Q,0,0,0)$$

となるので $[\Phi_1,\Phi]\in p(\mathfrak{a})$ である．

(1)　$\mathfrak{e}_7{}^C\cap\mathfrak{a}=\{0\}$, $\mathfrak{R}^C\cap\mathfrak{a}=\{0\}$ のとき（この場合は起らない）．$\mathfrak{R}^C\cap\mathfrak{a}=\{0\}$ であるから，$p|\mathfrak{a}:\mathfrak{a}\to\mathfrak{e}_7{}^C$ は単射である．$\{0\}\neq p(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{e}_7{}^C$ の ideal で，$\mathfrak{e}_7{}^C$ は単純である（定理4.37）から，$p(\mathfrak{a})=\mathfrak{e}_7{}^C$ である．よって $\dim_C\mathfrak{a}=\dim_C p(\mathfrak{a})=\dim_C\mathfrak{e}_7{}^C=133$ である．一方，$\mathfrak{e}_7{}^C\cap\mathfrak{a}=\{0\}$ であるから，$q|\mathfrak{a}:\mathfrak{a}\to\mathfrak{R}^C$ も単射である．よって $\dim_C\mathfrak{a}\leqq\dim_C\mathfrak{R}^C=56\times2+3=115$ となり，上記に矛盾する．

(2)　$\mathfrak{e}_7{}^C\cap\mathfrak{a}\neq\{0\}$ のとき．$\mathfrak{e}_7{}^C$ は単純であるから，$\mathfrak{e}_7{}^C\cap\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_7{}^C$ となり，$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{e}_7{}^C$ である．一方

$$\mathfrak{a}\ni[\Phi(0,0,0,1),(0,0,1,0)^-]=(0,0,1,0)^-,$$
$$\mathfrak{a}\ni[\Phi(0,0,0,1),(0,0,0,-1)_-]=(0,0,0,1)_-,$$
$$\mathfrak{a}\ni[(0,0,1,0)^-,(0,0,0,4)^-]=1^-,$$
$$\mathfrak{a}\ni[(0,0,0,1)_-,(0,0,4,0)_-]=1_-,$$
$$\mathfrak{a}\ni[1^-,1_-]=1,$$
$$\mathfrak{a}\ni[1^-+1_-,Q^-+P_-]=P^-+Q_-$$

より $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{R}^C$ となる．よって $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{e}_7{}^C\oplus\mathfrak{R}^C=\mathfrak{e}_8{}^C$ となり $\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_8{}^C$ を得る．

(3)　$\mathfrak{R}^C\cap\mathfrak{a}\neq\{0\}$ のとき．$0\neq R=(0,P,Q,r,s,t)\in\mathfrak{R}^C\cap\mathfrak{a}$ をとる．

(i)　$R=(0,P,Q,r,s,t)$, $P\neq0$ のとき．

$$\mathfrak{a}\ni[1,[1_-,[1,R]]]=[1,[1_-,(0,P,-Q,0,2s,-2t)]]$$
$$=[1,(0,0,P,-2s,0,0)]=-(0,0,P,0,0,0)=-P_-$$

となる．$P_1\in\mathfrak{P}^C$ を $P\times P_1\neq0$ のようにとり（補題4.42），さらに $\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$ を $[\Phi,P\times P_1]\neq0$ のようにとる．（$\mathfrak{e}_7{}^C$ は単純であるから，$\mathfrak{e}_7{}^C$ の中心は 0 のみである．よって，このような Φ は存在する）このとき

$$\mathfrak{a}\ni[\Phi,[P_1{}^-,P_-]]=[\Phi,P\times P_1]$$

となり (2) に帰着される．

(ii)　$R=(0,P,Q,r,s,t)$, $Q\neq0$ のときも (i) と同様である．

(iii) $R=(0,0,0,r,s,t)$, $r\neq 0$ のとき．$0\neq P\in\mathfrak{P}^C$ をとると

$$\mathfrak{a}\ni[P^-,[1^-,[1_-,R]]]=[P^-,[1^-,(0,0,0,-s,0,2r)]]$$
$$=[P^-,(0,0,0,2r,2s,0)]=(0,-2rP,0,0,0,0)$$

となり，(ii) に帰着される．

(iv) $R=(0,0,0,0,s,t)$, $s\neq 0$ のとき．

$$\mathfrak{a}\ni[1_-,R]=(0,0,0,-s,0,0)$$

となり (iii) に帰着される．

(v) $R=(0,0,0,0,0,t)$, $t\neq 0$ のときも (iv) と同様である．

以上で $\mathfrak{a}=\mathfrak{e}_8{}^C$ となり，$\mathfrak{e}_8{}^C$ の単純性が示された．

$R\in\mathfrak{e}_8{}^C$ に対し ad $R:\mathfrak{e}_8{}^C\to\mathfrak{e}_8{}^C$, ad $R(R_1)=[R,R_1]$ を $\Theta(R)$ で表す：$\Theta(R)=\mathrm{ad}R$．$\mathfrak{e}_8{}^C$ は単純である（定理5.2）から，R に $\Theta(R)$ を対応させることにより Lie 環の同型

$$\mathfrak{e}_8{}^C\cong\Theta(\mathfrak{e}_8{}^C)=\{\Theta(R)\,|\,R\in\mathfrak{e}_8{}^C\}$$

を得る．さらに，これらは Lie 環

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{e}_8{}^C)=\{\Theta\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{e}_8{}^C)\,|\,\Theta[R_1,R_2]=[\Theta R_1,R_2]+[R_1,\Theta R_2]\}$$

に同型である．以下これらを同一視し，$\Theta(R)$ を R で表わすことがある．Lie 環 $\mathfrak{e}_8$ に対しても同様である．

3 $\mathfrak{e}_8{}^C$ の Killing 形式

定義 $\mathfrak{e}_8{}^C$ に内積 $(R_1,R_2)_8$ を

$$(R_1,R_2)_8=(\Phi_1,\Phi_2)_7-\{Q_1,P_2\}+\{P_1,Q_2\}-8r_1r_2-4t_1s_2-4s_1t_2$$

$(R_i=(\Phi_i,P_i,Q_i,r_i,s_i,t_i)\in\mathfrak{e}_8{}^C)$ で定義する．

補題5.3 $\mathfrak{e}_8{}^C$ の内積 $(R_1,R_2)_8$ は $\mathfrak{e}_8{}^C$-不変である：

$$([R,R_1],R_2)_8+(R_1,[R,R_2])_8=0,\qquad R,R_i\in\mathfrak{e}_8{}^C.$$

証明 $([R,R_1],R_2)_8$

$$
=\left(\begin{pmatrix} [\Phi, \Phi_1]+P\times Q_1-P_1\times Q \\ \Phi P_1-\Phi_1 P+rP_1-r_1P+sQ_1-s_1Q \\ \Phi Q_1-\Phi_1 Q-rQ_1+r_1Q+tP_1-t_1P \\ -\dfrac{1}{8}\{P, Q_1\}+\dfrac{1}{8}\{P_1, Q\}+st_1-s_1t \\ \dfrac{1}{4}\{P, P_1\}+2rs_1-2r_1s \\ -\dfrac{1}{4}\{Q, Q_1\}-2rt_1+2r_1t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ P_2 \\ Q_2 \\ r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{pmatrix}\right)_8
$$

$=\cdots(([\Phi, \Phi_1], \Phi_2)_7+(\Phi_1, [\Phi, \Phi_2])_7=0$ (補題4.40), $(\Phi, P\times Q)_7=$ $\{\Phi P, Q\}$(補題4.40) 等を用いる)$\cdots$

$=-(R_1, [R, R_2])_8$.

定理5.4　$\mathfrak{e}_8{}^C$ の Killing 形式 B_8 は

$$
\begin{aligned}
B_8(R_1, R_2) &= -15(R_1, R_2)_8 \\
&= -15(\Phi_1, \Phi_2)_7+15\{Q_1, P_2\}-15\{P_1, Q_2\}+120r_1r_2+60t_1s_2+60s_1t_2 \\
&= \frac{5}{3}B_7(\Phi_1, \Phi_2)+15\{Q_1, P_2\}-15\{P_1, Q_2\}+120r_1r_2+60t_1s_2+60s_1t_2
\end{aligned}
$$

$(R_i=(\Phi_i, P_i, Q_i, r_i, s_i, t_i)\in\mathfrak{e}_8{}^C)$ で与えられる.

証明　$\mathfrak{e}_8{}^C$ は単純である（定理5.2）から，$\kappa\in C$ が存在して

$$B_8(R_1, R_2)=\kappa(R_1, R_2)_8, \quad R_i\in\mathfrak{e}_8{}^C$$

となる(補題5.3, [3]命題12.3). κ を求めるために $R_1=R_2=(0, 0, 0, 1, 0, 0)=1$ とおく.

$$(1, 1)_8=-8$$

である. 一方

$$
\begin{aligned}
[1, [1, (\Phi, P, Q, r, s, t)]] &= [1, (0, P, -Q, 0, 2s, -2t)] \\
&= (0, P, Q, 0, 4s, 4t)
\end{aligned}
$$

となるから

$$B_8(1, 1)=56\times 2+4\times 2=120$$

となる. よって $\kappa=-15$ である.

4　複素 Lie 群 $E_8{}^C$ と部分群 $E_7{}^C$

定義　Lie 環 $\mathfrak{e}_8{}^C$ の自己同型群を $E_8{}^C$ で表す：

$$E_8{}^C=\mathrm{Aut}(\mathfrak{e}_8{}^C)=\{\alpha\in\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{e}_8{}^C)\,|\,\alpha[R_1, R_2]=[\alpha R_1, \alpha R_2]\}.$$

$E_8{}^C$ の部分群 $(E_8{}^C)_{1,1^-,1_-}$ を

$$(E_8{}^C)_{1,1^-,1_-}=\{\alpha\in E_8{}^C \mid \alpha 1=1,\ \alpha 1^-=1^-,\ \alpha 1_-=1_-\}$$

で定義する．

定理5.5 $$(E_8{}^C)_{1,1^-,1_-}\cong E_7{}^C.$$

証明 $\beta\in E_7{}^C$ に対し，写像 $\widetilde{\beta}:\mathfrak{e}_8{}^C\to\mathfrak{e}_8{}^C$ を

$$\widetilde{\beta}=\begin{pmatrix} \mathrm{Ad}\,\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

($(\mathrm{Ad}\,\beta)\Phi=\beta\Phi\beta^{-1}$，$\Phi\in\mathfrak{e}_7{}^C$) で定義する．$\widetilde{\beta}\in E_8{}^C$ は容易に確かめられ，さらに $\widetilde{\beta}\in(E_8{}^C)_{1,1^-,1_-}$ である．逆に $\alpha\in E_8{}^C$ が，$\alpha 1=1$，$\alpha 1^-=1^-$，$\alpha 1_-=1_-$ を満たすとすると，α は

$$\alpha=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 & 0 & 0\\ \beta_{21} & \beta_2 & \beta_{23} & 0 & 0 & 0\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_3 & 0 & 0 & 0\\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 1 & 0\\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{array}{l} \beta_1\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{e}_7{}^C)\\ \beta_2,\beta_3,\beta_{23},\beta_{32}\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{P}^C)\\ \beta_{21},\beta_{31}\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{e}_7{}^C,\mathfrak{P}^C)\\ \beta_{12},\beta_{13}\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{P}^C,\mathfrak{e}_7{}^C)\\ a_i\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{e}_7{}^C,C)\\ b_i,c_i\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{P}^C,C) \end{array}$$

の形をしている．関係 $[\alpha\Phi,1]=[\alpha\Phi,\alpha 1]=\alpha[\Phi,1]=0$，すなわち

$$\begin{aligned} 0&=[(\beta_1\Phi,\beta_{21}\Phi,\beta_{31}\Phi,a_1\Phi,a_2\Phi,a_3\Phi),(0,0,0,1,0,0)]\\ &=(0,-\beta_{21}\Phi,\beta_{31}\Phi,0,-2a_2\Phi,2a_3\Phi) \end{aligned}$$

より $\beta_{21}=\beta_{31}=0$, $a_2=a_3=0$ を得る．さらに $[\alpha\Phi,1^-]=[\alpha\Phi,\alpha 1^-]=\alpha[\Phi,1^-]=0$，すなわち

$$0=[(\beta_1\Phi,0,0,a_1\Phi,0,0),(0,0,0,0,1,0)]=(0,0,0,0,2a_1\Phi,0)$$

より $a_1=0$ を得る．再び $[\alpha P^-,1]=[\alpha P^-,\alpha 1]=\alpha[P^-,1]=-\alpha P^-$，すなわち

$$\begin{aligned} &-(\beta_{12}P,\beta_2P,\beta_{32}P,b_1P,b_2P,b_3P)\\ &\quad=[(\beta_1P,\beta_2P,\beta_{32}P,b_1P,b_2P,b_3P),(0,0,0,1,0,0)]\\ &\quad=(0,-\beta_2P,\beta_{32}P,0,-2b_2P,2b_3P) \end{aligned}$$

より $\beta_{12}=\beta_{32}=0$，$b_1=b_2=b_3=0$ を得る．同様に $[\alpha Q_-,1]=[\alpha Q_-,\alpha 1]=\alpha[Q_-,1]=\alpha Q_-$ より $\beta_{13}=\beta_{23}=0$，$c_1=c_2=c_3=0$ を得る．以上で α は

$$\alpha=\begin{pmatrix}\beta_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E\end{pmatrix}$$

の形をしていることが分かった．α を $[(0, P, 0, 0, 0, 0), (0, 0, Q, 0, 0, 0)]=\Big(P\times Q, 0, 0, -\dfrac{1}{8}\{P, Q\}, 0, 0\Big)$ に施すと $[(0, \beta_2 P, 0, 0, 0, 0), (0, 0, \beta_3 Q, 0, 0, 0)]=\Big(\beta_1(P\times Q), 0, 0, -\dfrac{1}{8}\{P, Q\}, 0, 0\Big)$ より

$$\beta_1(P\times Q)=\beta_2 P\times\beta_3 Q,\quad \{\beta_2 P, \beta_3 Q\}=\{P, Q\} \tag{i}$$

を得る．再び α を $[(0, P, 0, 0, 0, 0), (0, Q, 0, 0, 0, 0)]=\Big(0, 0, 0, \dfrac{1}{4}\{P, Q\}, 0, 0\Big)$ に施して

$$\{\beta_2 P, \beta_2 Q\}=\{P, Q\} \tag{ii}$$

を得，さらに $[(\varPhi, 0, 0, 0, 0, 0), (0, P, 0, 0, 0, 0)]=(0, \varPhi P, 0, 0, 0, 0)$ に α を施して

$$(\beta_1\varPhi)(\beta_2 P)=\beta_2(\varPhi P) \tag{iii}$$

を得る．(i), (ii)より $\{\beta_2 P, \beta_3 Q\}=\{\beta_2 P, \beta_2 Q\}$, $P, Q\in\mathfrak{P}^C$ となるので $\beta_2=\beta_3$ ($=\beta$ とおく) となる．(iii) において，P の代りに $\beta^{-1}P$ とおくと

$$\beta_1\varPhi=\beta\varPhi\beta^{-1}$$

を得る．よって，(i)より

$$\beta(P\times Q)\beta^{-1}=\beta P\times\beta Q$$

となるので $\beta\in E_7{}^C$ である．

$E_8{}^C$ の部分群 $(E_8{}^C)_{1_-}=\{\alpha\in E_8{}^C\,|\,\alpha 1_-=1_-\}$ も考察しておこう．

命題5.6　$(E_8{}^C)_{1_-}$ は部分群 $\exp(\varTheta(\mathfrak{P}_-{}^C\oplus C_-))$ と $E_7{}^C$ の半直積である：

$$(E_8{}^C)_{1_-}=\exp(\varTheta(\mathfrak{P}_-{}^C\oplus C_-))\cdot E_7{}^C.$$

特に $(E_8{}^C)_{1_-}$ は連結である．

証明　$\mathfrak{P}_-{}^C\oplus C_-=\{(0, 0, Q, 0, 0, t)\,|\,Q\in\mathfrak{P}^C, t\in C\}$ は $\mathfrak{e}_8{}^C$ の部分 Lie 環である．$[Q_-, t_-]=0$ であるから $\varTheta(Q_-)$ と $\varTheta(t_-)$ は可換であり，$\exp(\varTheta(Q_-+t_-))=\exp(\varTheta(Q_-))\exp(\varTheta(t_-))$ が成り立つ．よって $\exp(\varTheta(\mathfrak{P}_-{}^C\oplus C_-))=\exp(\varTheta(\mathfrak{P}_-{}^C))\exp(\varTheta(C_-))$ は $E_8{}^C$ の部分群である．さて，$\alpha\in(E_8{}^C)_{1_-}$ に対して

$$\alpha 1=(\Phi, P, Q, r, s, t),\quad \alpha 1^-=(\Phi_1, P_1, Q_1, r_1, s_1, t_1)$$

とおく．$[\alpha 1, 1_-]=\alpha[1, 1_-]=-2\alpha 1_-=-21_-$，$[\alpha 1^-, 1_-]=\alpha[1^-, 1_-]=\alpha 1$ より

$$P=0,\quad s=0,\quad r=1,\quad \Phi=0,\quad P_1=-Q,\quad s_1=1,\quad r_1=-\frac{t}{2}$$

を得る．さらに，$[\alpha 1, \alpha 1^-]=\alpha[1, 1^-]=2\alpha 1^-$ より

$$\Phi_1=\frac{1}{2}Q\times Q,\quad Q_1=-\frac{t}{2}Q-\frac{1}{3}\Phi_1 Q,\quad t_1=-\frac{t^2}{4}-\frac{1}{16}\{Q, Q_1\}$$

を得る．よって α は

$$\alpha=\begin{pmatrix} * & * & * & 0 & \frac{1}{2}Q\times Q & 0 \\ * & * & * & 0 & -Q & 0 \\ * & * & * & Q & -\frac{t}{2}Q-\frac{1}{6}(Q\times Q)Q & 0 \\ * & * & * & 1 & -\frac{t}{2} & 0 \\ * & * & * & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & t & -\frac{t^2}{4}+\frac{1}{96}\{Q, (Q\times Q)Q\} & 1 \end{pmatrix}$$

の形をしている．一方

$$\delta 1^-=\exp\left(\Theta\left(\left(\frac{t}{2}\right)_-\right)\right)\exp(\Theta(Q_-))1^-$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}Q\times Q \\ -Q \\ -\frac{t}{2}Q-\frac{1}{6}(Q\times Q)Q \\ -\frac{t}{2} \\ 1 \\ -\frac{t^2}{4}+\frac{1}{96}\{Q, (Q\times Q)Q\} \end{pmatrix}(\text{計算略})=\alpha 1^-$$

となる．さらに

$$\delta 1=\alpha 1,\quad \delta 1_-=1_-=\alpha 1_-$$

も容易に確かめられる．よって $\delta^{-1}\alpha\in(E_8{}^C)_{1,1^-,1_-}=E_7{}^C$（定理5.5）となり

$$(E_8{}^C)_{1_-}=\exp(\Theta(\mathfrak{P}_-{}^C\oplus C_-))E_7{}^C$$

を得る．次に，$\beta\in E_7{}^C$ に対し

$$\beta(\exp(\Theta(Q_-)))\beta^{-1}=\exp(\Theta(\beta Q_-)),\quad \beta(\exp(\Theta(t_-)))\beta^{-1}=\exp(\Theta(t_-))$$

が成り立つ．(これは $\beta\Theta(Q_-)\beta^{-1}=\Theta(\beta Q_-)$, $\beta\Theta(t_-)\beta^{-1}=\Theta(t_-)$ を確かめるとよい)．これは $\exp(\Theta(\mathfrak{P}_-{}^C\oplus C_-))$ が $(E_8{}^C)_{1_-}$ の正規部分群であることを示し

ている．そして，split する完全系列

$$1 \longrightarrow \exp(\Theta(\mathfrak{P}_-{}^C \oplus C_-)) \longrightarrow (E_8{}^C)_{1_-} \longrightarrow E_7{}^C \longrightarrow 1$$

を得る．よって $(E_8{}^C)_{1_-}$ は $\exp(\Theta(\mathfrak{P}_-{}^C \oplus C_-))$ と $E_7{}^C$ の半直積である．

5　$E_8{}^C$ の連結性

定理5.7　$E_8{}^C$ は連結である．

証明　Lie 環 $\mathfrak{e}_8{}^C$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{e}_8{}^C) = E_8{}^C$ の中で，内部自己同型写像 $\exp(\Theta(R))$，$R \in \mathfrak{e}_8{}^C$ より生成される部分群を $\mathrm{Int}(\mathfrak{e}_8{}^C)$ とすると，E_8 型では $\mathrm{Aut}(\mathfrak{e}_8{}^C)/\mathrm{Int}(\mathfrak{e}_8{}^C) = \{1\}$，すなわち

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{e}_8{}^C) = \mathrm{Int}(\mathfrak{e}_8{}^C)$$

が成り立つことが知られている（例えば，松島与三，リー環論，共立出版）．$\mathrm{Int}(\mathfrak{e}_8{}^C)$ は連結であるから，これに等しい $E_8{}^C$ は連結である．

次のようにしても $E_8{}^C$ の連結性が導かれるので記しておく．

定義　$R \in \mathfrak{e}_8{}^C$ に対し，C-線型写像 $R \times R : \mathfrak{e}_8{}^C \to \mathfrak{e}_8{}^C$ を

$$(R \times R)R_1 = \Theta(R)^2 R_1 + \frac{1}{30} B_8(R, R_1)R, \quad R_1 \in \mathfrak{e}_8{}^C$$

で定義し，空間 $\mathfrak{W}^C$ を

$$\mathfrak{W}^C = \{ R \in \mathfrak{e}_8{}^C \mid R \times R = 0, R \neq 0 \}$$

で定義する．

補題5.8　$R = (\Phi, P, Q, r, s, t) \in \mathfrak{e}_8{}^C$，$R \neq 0$ が $\mathfrak{W}^C$ に属するための必要十分条件は

(1)　$2s\Phi - P \times P = 0$　　(2)　$2t\Phi + Q \times Q = 0$　　(3)　$2r\Phi + P \times Q = 0$

(4)　$\Phi P - 3rP - 3sQ = 0$　　(5)　$\Phi Q + 3rQ - 3tP = 0$

(6)　$\{P, Q\} - 16(st + r^2) = 0$

(7)　$2(\Phi P \times Q_1 + 2P \times \Phi Q_1 - rP \times Q_1 - sQ \times Q_1) - \{P, Q_1\}\Phi = 0$

(8)　$2(\Phi Q \times P_1 + 2Q \times \Phi P_1 + rQ \times P_1 - tP \times P_1) - \{Q, P_1\}\Phi = 0$

(9)　$8((P \times Q_1)Q - stQ_1 - r^2 Q_1 - \Phi^2 Q_1 + 2r\Phi Q_1)$

$$+5\{P, Q_1\}Q - 2\{Q, Q_1\}P = 0$$

(10) $8((Q\times P_1)P+stP_1+r^2P_1+\Phi^2P_1+2r\Phi P_1)+5\{Q, P_1\}P-2\{P, Q_1\}Q=0$

(11) $18((\mathrm{ad}\Phi)^2\Phi_1+Q\times\Phi_1P-P\times\Phi_1Q)+B_7(\Phi, \Phi_1)\Phi=0$

(12) $18(\Phi_1\Phi P-2\Phi\Phi_1P-r\Phi_1P-s\Phi_1Q)+B_7(\Phi, \Phi_1)P=0$

(13) $18(\Phi_1\Phi Q-2\Phi\Phi_1Q+r\Phi_1Q-t\Phi_1P)+B_7(\Phi, \Phi_1)Q=0$

がすべての $\Phi_1\in\mathfrak{e}_7{}^C$, $P_1, Q_1\in\mathfrak{P}^C$ に対して成り立つことである.

補題5.9 $\exp(\Theta((\mathfrak{P}^-)^C\oplus C\oplus C^-))1_-$

$$=\{\exp(\Theta(0, P_1, 0, r_1, s_1, 0))1_-\mid P_1\in\mathfrak{P}^C, r_1, s_1\in C\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}\Phi\\ P\\ Q\\ r\\ s\\ t\end{pmatrix}\in\mathfrak{e}_8{}^C\ \middle|\ \begin{array}{l}\Phi=-\dfrac{1}{28}Q\times Q\\ P=\dfrac{r}{t}Q-\dfrac{1}{6t^2}\{Q\times Q\}Q\\ s=-\dfrac{r^2}{t}+\dfrac{1}{96t^2}\{Q, (Q\times Q)Q\}\\ t\neq 0\end{array}\right\}$$

(これを U^C とおく)

証明 $\Theta=\Theta(0, P_1, 0, r_1, s_1, 0)\in\mathfrak{e}_8{}^C$ に対して

$\Theta^n1_-=$

$$\begin{pmatrix}((-2)^{n-1}+(-1)^n)r_1{}^{n-2}P_1\times P_1\\ \left((-2)^{n-1}-\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}\right)r_1{}^{n-2}s_1P_1+\left(\dfrac{1-(-2)^n}{6}+\dfrac{(-1)^n}{2}\right)r_1{}^{n-3}(P_1\times P_1)P_1\\ ((-2)^n+(-1)^{n+1})r_1{}^{n-1}P_1\\ (-2)^{n-1}r_1{}^{n-1}s_1\\ -((-2)^{n-2}+2^{n-2})r_1{}^{n-2}s_1{}^2+\dfrac{2^{n-2}+(-2)^{n-2}-(-1)^n-1}{24}r_1{}^{n-4}\{P_1, (P_1\times P_1)P_1\}\\ (-2)^nr_1{}^n\end{pmatrix}$$

となることが計算により分かる. これより

$$\exp(\Theta(0, P_1, 0, r_1, s_1, 0))1_-=(\exp\Theta)1_-=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Theta^n1_-=$$

$$\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2r_1{}^2}(e^{-2r_1}-2e^{-r_1}+1)P_1\times P_1\\ \dfrac{s_1}{2r_1{}^2}(-e^{-2r_1}-e^{r_1}+e^{-r_1}+1)P_1+\dfrac{1}{6r_1{}^3}(-e^{-2r_1}+e^{r_1}+3e^{-r_1}-3)(P_1\times P_1)P_1\\ \dfrac{1}{r_1}(e^{-2r_1}-e^{-r_1})P_1\\ \dfrac{s_1}{2r_1}(1-e^{-2r_1})\\ -\dfrac{s_1{}^2}{4r_1{}^2}(e^{-2r_1}+e^{2r_1}-2)+\dfrac{1}{96r_1{}^4}(e^{2r_1}+e^{-2r_1}-4e^{r_1}-4e^{-r_1}+6)\{P_1, (P_1\times P_1)P_1\}\\ e^{-2r_1}\end{pmatrix}$$

となる.

$$Q=\frac{1}{r_1}(e^{-2r_1}-e^{-r_1}),\quad r=\frac{s_1}{2r_1}(1-e^{-2r_1}),\quad t=e^{-2r_1} \tag{i}$$

（$r_1=0$ のときには $\dfrac{f(r_1)}{r_1}$ は $\displaystyle\lim_{r_1\to 0}\frac{f(r_1)}{r_1}$ を意味する）とおくと

$$(\exp\Theta)1_-=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t}Q\times Q \\ \dfrac{r}{t}Q-\dfrac{1}{6t^2}(Q\times Q)Q \\ Q \\ r \\ -\dfrac{r^2}{t}+\dfrac{1}{96r^3}\{Q,(Q\times Q)Q\} \\ t \end{pmatrix}\in U^C$$

を得る．逆に $R=(\Phi,P,Q,r,s,t)\in U^C$ に対し，$P_1\in\mathfrak{P}^C$，$r_1,s_1\in C$ を (i) を満たすようにとる．（実際には

$$P_1=\frac{\log t}{2(\sqrt{t}-t)}Q,\quad s_1=\frac{r\log t}{t-1},\quad r_1=-\frac{\log t}{2}$$

（$\sqrt{t}\in C$ は $\sqrt{t}^2=t$ を満たすものの 1 つをとり，$\log t$ は $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{\log t}{t-1}=0$ を満たすものの 1 つを選ぶ）とすればよい）．このとき $\exp(\Theta(0,P_1,0,r_1,s_1,0))1_-=R$ となる．

$E_8{}^C$ の単位元を含む連結成分を $(E_8{}^C)_0$ で表す．

命題5.10　群 $(E_8{}^C)_0$ は $\mathfrak{W}^C$ に推移的に働く．特に，$\mathfrak{W}^C$ は連結である．

証明　$\alpha\in E_8{}^C$ は $\mathfrak{e}_8{}^C$ の Killing 形式を不変にする：$B_8(\alpha R_1,\alpha R_2)=B_8(R_1,R_2)$，$R_i\in\mathfrak{e}_8{}^C$ ので，$\alpha\in E_8{}^C$，$R\in\mathfrak{W}^C$ に対して $\alpha R\in\mathfrak{W}^C$ となる．実際，

$$\begin{aligned}(\alpha R\times\alpha R)R_1&=[\alpha R,[\alpha R,R_1]]+\frac{1}{30}B_8(\alpha R,R_1)\alpha R\\ &=\alpha[R,[R,\alpha^{-1}R_1]]+\frac{1}{30}B_8(R,\alpha^{-1}R_1)\alpha R\\ &=\alpha((R\times R)\alpha^{-1}R_1)=0\end{aligned}$$

である．$E_8{}^C$ は（当然 $(E_8{}^C)_0$ は）$\mathfrak{W}^C$ に働く．$(E_8{}^C)_0$ が $\mathfrak{W}^C$ に推移的に働くことを示そう．まず $1_-\in\mathfrak{W}^C$ である．実際，$R_1\in\mathfrak{e}_8{}^C$ に対して

$$\begin{aligned}(1_-\times 1_-)R_1&=[1_-,[1_-,(\Phi_1,P_1,Q_1,r_1,s_1,t_1)]]+\frac{1}{30}B_8(1_-,R_1)1_-\\ &=[1_-,(0,0,P_1,-s_1,0,2r_1)]+2s_11_-\end{aligned}$$

$$=(0,0,0,0,0,-2s_1)+2s_1 1_- = 0$$

となるからである．推移性を示すために，任意の $R\in\mathfrak{W}^C$ がある $\alpha\in(E_8{}^C)_0$ により $\alpha R=1_-\in\mathfrak{W}^C$ となることを示せばよい．

(1)　$R=(\Phi,P,Q,r,s,t)$，$t\neq 0$ のとき．補題5.8.(2),(5),(6)より

$$\Phi=-\frac{1}{2t}Q\times Q,\ \ P=\frac{r}{t}Q-\frac{1}{6t^2}(Q\times Q)Q,\ \ s=-\frac{r^2}{t}+\frac{1}{96t^3}\{Q,(Q\times Q)Q\}$$

となる．補題5.9より $(\exp\Theta)1_-=R$ となる $\Theta=\Theta(0,P_1,0,r_1,s_1,0)\in\Theta(\mathfrak{e}_8{}^C)$ が存在する．

(2)　$R=(\Phi,P,Q,r,s,t)$，$s\neq 0$ のとき．$\omega=\exp\left(\Theta\left(0,0,0,0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\right)\in(E_8{}^C)_0$ に対し

$$\omega(\Phi,P,Q,r,s,t)=(\Phi,Q,-P,-r,-t,-s)$$

となり (1) に帰着される．

(3)　$R=(\Phi,P,Q,r,0,0)$，$r\neq 0$ のとき．補題5.8.(2),(5),(6)より

$$Q\times Q=0,\ \ \Phi Q=-3rQ,\ \ \{P,Q\}=16r^2$$

となる．このとき $\Theta=\Theta(0,Q,0,0,0,0)\in\Theta(\mathfrak{e}_8{}^C)$ に対し

$$(\exp\Theta)R=(\Phi,P+2rQ,Q,r,-4r^2,0)$$

となり(2)に帰着される．

(4)　$R=(\Phi,P,Q,0,0,0)$，$Q\neq 0$ のとき．$P_1\in\mathfrak{P}^C$ を $\{P_1,Q\}\neq 0$ のように選ぶ．このとき $\Theta=\Theta(0,P_1,0,0,0,0)\in\Theta(\mathfrak{e}_8{}^C)$ に対し

$$(\exp\Theta)R=\left(*,*,*,-\frac{1}{8}\{P_1,Q\},*,*\right)$$

となり (3) に帰着される．

(5)　$R=(\Phi,P,Q,0,0,0)$，$P\neq 0$ のとき．(4)と同様である．

(6)　$R=(\Phi,0,0,0,0,0)$，$\Phi\neq 0$ のとき．補題5.8.(10)より

$$\Phi^2=0$$

である．$P_1\in\mathfrak{P}^C$ を $\Phi P_1\neq 0$ のように選ぶ．このとき，$\Theta=\Theta(0,P_1,0,0,0,0)\in\Theta(\mathfrak{e}_8{}^C)$ に対し

$$(\exp\Theta)R=\left(\Phi,-\Phi P_1,0,0,-\frac{1}{8}\{\Phi P_1,P_1\},0\right)$$

となり，(2) または (5) に帰着される．
以上で命題が証明された．

定理5.11　　$E_8{}^C/(E_8{}^C)_{1_-}\simeq\mathfrak{W}^C$.

特に $E_8{}^C$ は連結である．

証明　群 $E_8{}^C$ は $\mathfrak{W}^C$ に推移的に働く（命題5.10）ので定理の前半を得る．1_- における等方群 $(E_8{}^C)_{1_-}$ は連結であり（命題5.6）$\mathfrak{W}^C$ も連結である（命題5.10）から，$E_8{}^C$ も連結である．

Lie 群 $E_8{}^C$ の Lie 環は $\mathrm{Der}(\mathfrak{e}_8{}^C)\cong\mathfrak{e}_8{}^C$ であり，$\mathfrak{e}_8{}^C$ が E_8 型 Lie 環であることを後(定理5.31)で示すので，$E_8{}^C$ は E_8 型複素 Lie 群であることが分かった．Lie 群の一般論より，E_8 型複素 Lie 群は連結ならば単連結であることが知られているので次の定理を得る．

定理5.12　$E_8{}^C$ は単連結な E_8 型複素 Lie 群である．

6　compact 例外群 E_8

定義　$\mathfrak{e}_8{}^C$ に Hermite 内積 $\langle R_1, R_2\rangle$ を

$$\langle R_1, R_2\rangle=-\frac{1}{15}B_8(\tau\widetilde{\lambda}R_1, R_2)$$

で定義する．

命題5.13　$\mathfrak{e}_8{}^C$ の Hermite 内積 $\langle R_1, R_2\rangle$ は正値である．

証明　$R_i=(\Phi_i, P_i, Q_i, r_i, s_i, t_i)\in\mathfrak{e}_8{}^C$，$i=1,2$ とする．$\tau\widetilde{\lambda}R_1=(\tau\lambda\Phi_1\lambda^{-1}\tau,$ $\tau\lambda Q_1, -\tau\lambda P_1, -\tau r_1, -\tau t_1, -\tau s_1)$ であるから，定理5.4より

$$\begin{aligned}&\langle R_1, R_2\rangle\\ &\quad=(\tau\lambda\Phi_1\lambda^{-1}\tau, \Phi_2)_7+\langle P_1, P_2\rangle+\langle Q_1, Q_2\rangle+8(\tau r_1)r_2+4(\tau s_1)s_2+4(\tau t_1)t_2\end{aligned}$$

となる．よって $(\tau\lambda\Phi_1\lambda^{-1}\tau, \Phi_2)_7$ が正値であることを示せばよい．$\Phi_i=\Phi(\phi_i,$ $A_i, B_i, \nu_i)\in\mathfrak{e}_7{}^C$，$i=1,2$ とする．$\tau\lambda\Phi_1\lambda^{-1}\tau=\Phi(-\tau{}^t\phi_1\tau, -\tau B_1, -\tau A_1, -\tau\nu_1)$ であるから

$$(\tau\lambda\Phi_1\lambda^{-1}\tau, \Phi_2)_7=2(\tau{}^t\phi_1\tau, \phi_2)_6+4\langle A_1, A_2\rangle+4\langle B_1, B_2\rangle+\frac{8}{3}(\tau\nu_1)\nu_2$$

となる．よって $(\tau{}^t\phi_1\tau, \phi_2)_6$ が正値であることを示せばよい．$\phi_i=\delta_i+\widetilde{T}_i\in$ $\mathfrak{e}_6{}^C$，$\delta_i\in\mathfrak{f}_4{}^C$，$T_i\in\mathfrak{J}_0{}^C$，$i=1,2$ とする．$\tau{}^t\phi_1\tau=-\tau\delta_1\tau+\widetilde{\tau T_1}$ であるから

$$(\tau {}^t\phi_1 \tau, \phi_2)_6 = -(\tau\delta_1\tau, \delta_2)_4 + \langle T_1, T_2\rangle$$

となる．よって $-(\tau\delta_1\tau, \delta_2)_4$ が正値であることを示せばよい．しかし，それは

$$\sqrt{2}[\tilde{E}_1, \tilde{F}_2(e_i)],\quad \sqrt{2}[\tilde{E}_1\tilde{F}_3(e_i)],\quad \sqrt{2}[\tilde{E}_3, \tilde{F}_1(e_i)],\qquad 0 \leqq i \leqq 7$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{F}_1(e_i), \tilde{F}_1(e_j)],\qquad 0 \leqq i < j \leqq 7$$

が，内積 $-(\tau\delta_1\tau, \delta_2)_4$ に関して $\mathfrak{f}_4{}^C$ の正規直交 C-基であることから分かる．よって命題が証明された．

定義　群 E_8 を

$$E_8 = \{\alpha \in E_8{}^C \mid \langle \alpha R_1, \alpha R_2\rangle = \langle R_1, R_2\rangle\}$$

で定義する．

定理5.14　E_8 は compact Lie 群である．

証明　E_8 はユニタリ群 $U(248) = U(\mathfrak{e}_8{}^C) = \{\alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{e}_8{}^C) \mid \langle \alpha R_1, \alpha R_2\rangle = \langle R_1, R_2\rangle\}$（命題5.13）の閉部分群として compact Lie 群である．

定理5.15　Lie 群 $E_8{}^C$ の極分解は

$$E_8{}^C \simeq E_8 \times \boldsymbol{R}^{248}$$

で与えられる．特に E_8 は単連結である．

証明　$E_8{}^C$ は $\mathrm{Iso}_C(\mathfrak{e}_8{}^C) = GL(248, C)$ の代数部分群であり，$\alpha \in E_8{}^C$ ならば，α の内積 $\langle R_1, R_2\rangle$ に関する共役転置写像 α^* は $\alpha^* = \tau\tilde{\lambda}\alpha^{-1}\tilde{\lambda}\tau \in E_8{}^C$ である．よって Chevalley の補題（[3]定理6.3）より

$$E_8{}^C \simeq (E_8{}^C \cap U(e_8{}^C)) \times \boldsymbol{R}^d = E_8 \times \boldsymbol{R}^d,\quad d = 248$$

となる．$E_8{}^C$ は単連結である（定理5.12）から E_8 も単連結である．

命題5.16　Lie 環 $\mathfrak{e}_8$ の複素化は $\mathfrak{e}_8{}^C$ である．

証明　$R \in \mathfrak{e}_8{}^C$ に対し，R の内積 $\langle R_1, R_2\rangle$ に関する共役転置写像 R^* は $R^* = -\tau\tilde{\lambda}R\tilde{\lambda}\tau \in \mathfrak{e}_8{}^C$ であり，$R \in \mathfrak{e}_8{}^C$ が $\mathfrak{e}_8$ に属するための必要十分条件は $R^* = -R$ である．さて，$R \in \mathfrak{e}_8{}^C$ は

$$R=\frac{R-R^*}{2}+i\frac{R+R^*}{2i},\qquad \frac{R-R^*}{2},\ \frac{R+R^*}{2i}\in \mathfrak{e}_8$$

と表されるので，$\mathfrak{e}_8{}^C$ は $\mathfrak{e}_8$ の複素化である．

以上を次の定理にまとめておく．

定理5.17　E_8 は単連結な compact Lie 群であり，その次元は248である．

7　E_8 の対合自己同型写像 υ と部分群 $(SU(2)\times E_7)/Z_2$

定義　C-線型写像 $\upsilon:\mathfrak{e}_8{}^C\to\mathfrak{e}_8{}^C$ を

$$\upsilon(\Phi, P, Q, r, s, t)=(\Phi, -P, -Q, r, s, t)$$

で定義する．$\upsilon\in E_8$ であり，$\upsilon^2=1$ である．（υ は E_7 の中心の元 -1 を E_8 の元とみなしたものである（定理5.19参照））．

E_8 の部分群

$$(E_8)^\upsilon=\{\alpha\in E_8\,|\,\upsilon\alpha=\alpha\upsilon\}$$

を調べよう．

補題5.18　$\alpha\in E_8$ が $\alpha 1_-=1_-$ を満たすならば，$\alpha 1=1$，$\alpha 1^-=1^-$ も満たす．

証明　$\alpha 1=(\Phi, P, Q, r, s, t)$ とおく．$[\alpha 1, 1_-]=[\alpha 1, \alpha 1_-]=\alpha[1, 1_-]=-2\alpha 1_-=-21_-$ より

$$-21_-=[(\Phi, P, Q, r, s, t), 1_-]=(0, 0, -P, s, 0, -2r)$$

より $P=0$，$s=0$，$r=1$ を得る．さらに $\langle\alpha 1, \alpha 1\rangle=\langle 1, 1\rangle=8$，すなわち $\langle\Phi, \Phi\rangle+\langle Q, Q\rangle+8+4(\tau t)t=8$ より $\Phi=0$，$Q=0$，$t=0$ となる．よって $\alpha 1=1$ を得る．$[1^-, 1_-]=1$ に α を施し，上記と同じ方法で $\alpha 1^-=1^-$ を得る．

E_8 の部分群 $(E_8)_{1_-}$ を

$$(E_8)_{1_-}=\{\alpha\in E_8\,|\,\alpha 1_-=1_-\}$$

で定義する．

定理5.19 $$(E_8)_{1_-}\cong E_7.$$

証明 $(E_8)_{1_-}=(E_8)_{1,1^-,1_-}=\{\alpha\in E_8\,|\,\alpha 1=1,\alpha 1^-=1^-,\alpha 1_-=1_-\}$ (補題5.18)

$=\{\alpha\in(E_8{}^C)_{1,1^-,1_-}\,|\,\tau\widetilde{\lambda}\alpha=\alpha\tau\widetilde{\lambda}\}$

$\cong\{\alpha\in E_7{}^C\,|\,\tau\widetilde{\lambda}\alpha=\alpha\tau\widetilde{\lambda}\}$ (定理5.5)

$=\{\alpha\in E_7{}^C\,|\,\tau\lambda\alpha=\alpha\tau\lambda\}$ (定理5.5の対応で)

$=E_7$ (補題4.7).

注意 空間 $\mathfrak{W}_1$ を

$$\mathfrak{W}_1=\{R\in\mathfrak{e}_8{}^C\,|\,R\times R=0,\langle R,R\rangle=4\}$$

で定義すると，同相

$$E_8/E_7\simeq\mathfrak{W}_1$$

を得る．(I. Yokota-T. Imai, On the homogeneous space E_8/E_7, J. Math. Kyoto Univ., **23** (1983) をみて下さい)．

定理5.20 $(E_8)^v$ は群 $SU(2)=\{A\in M(2,C)\,|\,(\tau{}^tA)A=E,\det A=1\}$ に同型な群

$$\phi(SU(2))=\{\phi(A)\in E_8\,|\,A\in SU(2)\}$$

を部分群として含んでいる．ここに，$A=\begin{pmatrix}a & -\tau b\\ b & \tau a\end{pmatrix}\in SU(2)$ に対し，$\phi(A)$：$\mathfrak{e}_8{}^C\to\mathfrak{e}_8{}^C$ は

$$\phi(A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&a1&-\tau b1&0&0&0\\0&b1&\tau a1&0&0&0\\0&0&0&(\tau a)a-(\tau b)b&-(\tau a)b&a(\tau b)\\0&0&0&2a(\tau b)&a^2&-(\tau b)^2\\0&0&0&2(\tau a)b&-b^2&(\tau a)^2\end{pmatrix}$$

とする．

証明 $A=\begin{pmatrix}a & -\tau b\\ b & \tau a\end{pmatrix}=\exp\begin{pmatrix}-i\nu & -\tau\kappa\\ \kappa & i\nu\end{pmatrix}\in SU(2)$ に対し，$\phi(A)=\exp(\Theta(0,0,0,i\nu,\kappa,-\tau\kappa))\in(E_8)^v$ である．

定理5.21 $$(E_8)^v\cong(SU(2)\times E_7)/\boldsymbol{Z}_2,\quad \boldsymbol{Z}_2=\{(E,1),(-E,-1)\}$$

証明　写像 $\varphi: SU(2)\times E_7 \to (E_8)^\upsilon$ を

$$\varphi(A,\beta)=\phi(A)\beta$$

で定義する．$\phi(A)\in\phi(SU(2))$ と $\beta\in E_7$ は可換であるから，φ は群準同型写像である．$(E_8)^\upsilon$ は単連結 Lie 群 E_8（定理5.17）の対合自己同型写像 υ の不動点部分群として連結である．よって φ の全射を示すには，その微分 φ_*：$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{e}_7\to(\mathfrak{e}_8)^\upsilon$ の全射を示せばよいが，それは殆んど自明である．実際，$(\mathfrak{e}_8)^\upsilon=\{\Theta(R)\in\Theta(\mathfrak{e}_8)\,|\,\upsilon\Theta(R)=\Theta(R)\upsilon\}\cong\{R\in\mathfrak{e}_8|\upsilon R=R\}=\{(\Phi,0,0,r,s,-\tau s)\,|\,\Phi\in\mathfrak{e}_7, r\in i\boldsymbol{R}, s\in C\}$ となるからである．Ker $\varphi=\{(E,1),(-E,-1)\}=\boldsymbol{Z}_2$ は容易に分かる．よって Lie 群の同型 $(SU(2)\times E_7)/\boldsymbol{Z}_2\cong(E_8)^\upsilon$ を得る．($(E_8)^\upsilon$ の連結性を用いずに，φ の全射を直接証明することもできる．T. Imai-I. Yokota, Non-compact simple Lie group $E_{8(-24)}$ of type E_8, J. Fac. Sci. Shinshu Univ., **15** (1980) をみて下さい)．

8　E_8 の対合自己同型写像 $\tilde{\lambda}\gamma$ と部分群 $Ss(16)$

C-線型写像 $\tilde{\lambda}\gamma: \mathfrak{e}_8{}^C\to\mathfrak{e}_8{}^C$,

$$\tilde{\lambda}\gamma(\Phi,P,Q,r,s,t)=(\lambda\gamma\Phi\gamma\lambda^{-1},\lambda\gamma Q,-\lambda\gamma P,-r,-t,-s)$$

は $\tilde{\lambda}\gamma\in E_8$ であり，$(\tilde{\lambda}\gamma)^2=1$ である．さて，E_8 の部分群

$$\begin{aligned}(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}&=\{\alpha\in E_8\,|\,\tilde{\lambda}\gamma\alpha=\alpha\tilde{\lambda}\gamma\}\\&=\{\alpha\in E_8\,|\,\tau\gamma\alpha=\alpha\tau\gamma\}=(E_8)^{\tau\gamma}\end{aligned}$$

を調べよう．

$\boldsymbol{R}$-線型写像 $l: M(8,C)\to M(16,\boldsymbol{R})$ を

$$l\Big((x_{kl}+iy_{kl})\Big)=\left(\begin{pmatrix}x_{kl} & y_{kl}\\ -y_{kl} & x_{kl}\end{pmatrix}\right),\quad x_{kl},y_{kl}\in\boldsymbol{R}$$

で定義する．また $I,J\in M(16,\boldsymbol{R})$ を

$$I=\begin{pmatrix}I & & \\ & \ddots & \\ & & I\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix}J & & \\ & \ddots & \\ & & J\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

で定義すると $IJ=-JI$ であり，$X,Y\in M(8,C)$ に対し

(1)　$l(XY)=l(X)l(Y)$

(2)　$Il(X)=l(\tau X)I$,　$Jl(X)=l(X)J$

(3)　${}^t l(X)=l(\tau {}^t X)$

が成り立つ．

補題5.22　(1)　$l(\mathfrak{u}(8))=\{B\in\mathfrak{so}(16)\,|\,JB=BJ\}$,

$l(\mathfrak{S}(8,C))I=\{B\in\mathfrak{so}(16)\,|\,JB=-BJ\}$.

(2)　任意の元 $B\in\mathfrak{so}(16)$ は

$$B=l(D')+l(S)I, \qquad D'\in\mathfrak{u}(8),\ S\in\mathfrak{S}(8,C)$$
$$=l(D)+l(S)I+l(icE), \qquad D\in\mathfrak{su}(8),\ S\in\mathfrak{S}(8,C),\ c\in\boldsymbol{R}$$

と一意に表される．

証明　(1)　$D\in\mathfrak{u}(8)$ ならば $Jl(D)=l(D)J$，${}^t l(D)=l(\tau {}^t D)=-l(D)$ である．逆に，$B\in\mathfrak{so}(16)$ が $JB=BJ$ とする．$B=l(D)$，$D\in M(8,C)$ とおくと，$l(-D)=-B={}^t B={}^t l(D)=l(\tau {}^t D)$ より $\tau {}^t D=-D$，すなわち $D\in\mathfrak{u}(8)$ である．次に，$S\in\mathfrak{S}(8,C)$ に対して，$Jl(S)I=l(S)JI=-l(S)IJ$，${}^t(l(S)I)={}^t I {}^t l(S)=Il(\tau {}^t S)=-Il(\tau S)=-l(S)I$ である．逆に，$B\in\mathfrak{so}(16)$ が $JB=-BJ$ とする．BI を考えると，$JBI=BIJ$ となるので，$BI=l(S)$，$S\in M(8,C)$ とおく．このとき $l(-S)I=-B={}^t B={}^t I {}^t l(S)=Il(\tau {}^t S)=l({}^t S)I$ より $-S={}^t S$，すなわち $S\in\mathfrak{S}(8,C)$ となる．

(2)　$B=\dfrac{B-JBJ}{2}+\dfrac{B+JBJ}{2}$ とし (1) を用いるとよい．

次の補題5.23，補題5.24は E_7, **9** の写像 $\chi:(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}\to\mathfrak{S}(8,C)$, $\varphi_*:\mathfrak{su}(8)\to(\mathfrak{e}_7)^{\lambda\gamma}$ のもつ性質であるが，次の定理5.25の証明に用いる．

補題5.23　Lie 環の同型写像 $\varphi_*:\mathfrak{sp}(4)\to(\mathfrak{e}_6)^{\lambda\gamma}$，$(\varphi_* D)X=g^{-1}(D(gX)+(gX)D^*)$，$X\in\mathfrak{J}^C$（定理3.24）は

$$\varphi_*([gX_1,gX_2])=2(X_1\vee\gamma X_2-X_2\vee\gamma X_1), \qquad X_1,X_2\in\mathfrak{J}^C$$

を満たす．

証明　まず $[gX_1,gX_2]\in\mathfrak{sp}(4)$ に注意しよう．

$g(2(X_1\vee\gamma X_2)X) \qquad X\in\mathfrak{J}^C$

$$=g((\gamma X_2,X)X_1+\frac{1}{3}(X_1,\gamma X_2)X-4\gamma X_2\times(X_1\times X)) \quad (\text{補題}3.28)$$

$$=(\gamma X_2, X)gX_1+\frac{1}{3}(X_1, \gamma X_2)gX-4gX_2\circ(gX_1\circ gX)+(\gamma X_1, X)gX_2$$
$$+(\gamma X_2, \gamma X_1, \gamma X)E \quad (\text{補題}3.23)$$

であるから

$$\begin{aligned}
&g(2(X_1\vee\gamma X_2-X_2\vee\gamma X_1)X)\\
&\quad=-4gX_2\circ(gX_1\circ gX)+4gX_1\circ(gX_2\circ gX)\\
&\quad=-gX_2gX_1gX-gX_2gXgX_1-gX_1gXgX_2-gXgX_1gX_2\\
&\qquad+gX_1gX_2gX+gX_1gXgX_2+gX_2gXgX_1+gXgX_2gX_1\\
&\quad=[gX_1, gX_2]gX-gX[gX_1, gX_2]=g((\varphi_*[gX_1, gX_2])X)
\end{aligned}$$

となる．g は単射であるから，補題を得る．

補題5.24　$S, S_1, S_2\in\mathfrak{S}(8, C)$ に対し

(1)　$\lambda\gamma\chi^{-1}(S)=-\chi^{-1}(iS)$

(2)　$\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)=4i\{\chi^{-1}S_1, \chi^{-1}S_2\}$

(3)　$\varphi_*\Big((S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)-\frac{1}{8}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)E\Big)$
$$=4(\lambda\gamma\chi^{-1}S_1\times\chi^{-1}S_2-\lambda\gamma\chi^{-1}S_2\times\chi^{-1}S_1)$$

が成り立つ．

証明　(1)　$\chi^{-1}S=P=(X, Y, \xi, \eta)$ とおく．

$$\begin{aligned}
\chi\lambda\gamma\chi^{-1}S&=\chi\lambda\gamma(X, Y, \xi, \eta)=\chi(\gamma Y, -\gamma X, \eta, -\xi)\\
&=\Big(k\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)+ik\Big(g\Big(\gamma(-\gamma X)-\frac{-\xi}{2}E\Big)\Big)\Big)J\\
&=-i\Big(k\Big(gX-\frac{\xi}{2}E\Big)+ik\Big(g(\gamma Y)-\frac{\eta}{2}E\Big)\Big)J\\
&=-i\chi(X, Y, \xi, \eta)=-i\chi P=-iS.
\end{aligned}$$

(2), (3)　$\chi^{-1}S_i=P_i=(X_i, Y_i, \xi_i, \eta_i)$, $i=1,2$ とおく．まず $S_1\tau S_2-S_2\tau S_1-\frac{1}{8}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)\in\mathfrak{su}(8)$ に注意しよう．さて

$$\begin{aligned}
S_1\tau S_2&=\chi P_1\tau\chi P_2=\chi(X_1, Y_1, \xi_1, \eta_1)\tau\chi(X_2, Y_2, \xi_2, \eta_2)\\
&=\Big(k\Big(gX_1-\frac{\xi_1}{2}E\Big)+ik\Big(g(\gamma Y_1)-\frac{\eta_1}{2}E\Big)\Big)J\tau\Big(\Big(k\Big(gX_2-\frac{\xi_2}{2}E\Big)\\
&\qquad+ik\Big(g(\gamma Y_2)-\frac{\eta_2}{2}E\Big)\Big)J\Big)
\end{aligned}$$

$$=\left(k\left(gX_1-\frac{\xi_1}{2}E\right)+ik\left(g(\gamma Y_1)-\frac{\eta_1}{2}E\right)\right)\left(k\left(gX_2-\frac{\xi_2}{2}E\right)\right.$$

$$\left.-ik\left(g(\gamma Y_2)-\frac{\eta_2}{2}E\right)\right)J^2$$

$$=-k\left(\left(gX_1-\frac{\xi_1}{2}E\right)\left(gX_2-\frac{\xi_2}{2}E\right)+\left(g(\gamma Y_1)-\frac{\eta_1}{2}E\right)\left(g(\gamma Y_2)-\frac{\eta_2}{2}E\right)\right)$$

$$-ik\left(\left(g(\gamma Y_1)-\frac{\eta_1}{2}E\right)\left(gX_2-\frac{\xi_2}{2}E\right)-\left(gX_1-\frac{\xi_1}{2}E\right)\left(g(\gamma Y_2)-\frac{\eta_2}{2}E\right)\right)$$

となる．よって

$$S_1\tau S_2-S_2\tau S_1$$

$$=-k(gX_1gX_2-gX_2gX_1+g(\gamma Y_1)g(\gamma Y_2)-g(\gamma Y_2)g(\gamma Y_1))$$

$$-ik(g(\gamma Y_1)gX_2-g(\gamma Y_2)gX_1-gX_1g(\gamma Y_2)+gX_2g(\gamma Y_1))$$

$$-\eta_1gX_2+\eta_2gX_1+\xi_1g(\gamma Y_2)-\xi_2g(\gamma Y_1))+\frac{i}{2}(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)E$$

$$=k(-[gX_1,gX_2]-[g(\gamma Y_1),g(\gamma Y_2)])$$

$$+ik(g(2\gamma X_1\times Y_2-2\gamma X_2\times Y_1+\eta_1X_2-\eta_2X_1-\xi_1\gamma Y_2+\xi_2\gamma Y_1))$$

$$+\frac{i}{2}((X_1,Y_2)-(X_2,Y_1)+\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1))E \quad (\text{補題}3.23)$$

$$\left(\begin{array}{l}D=-[gX_1,gX_2]-[g(\gamma Y_1),g(\gamma Y_2)]\in\mathfrak{sp}(4),\\ A=2\gamma X_1\times Y_2-2\gamma X_2\times Y_1+\eta_1X_2-\eta_2X_1-\xi_1\gamma Y_2+\xi_2\gamma Y_1\in\mathfrak{J}^C\end{array}\ \text{とおく}\right)$$

$$=kD+ik(gA)+\frac{i}{2}\{P_1,P_2\}E$$

となる．両辺の trace をとると

$$\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)=4i\{P_1,P_2\}=4i\{\chi^{-1}S_1,\chi^{-1}S_2\}$$

となり，また上式は

$$S_1\tau S_2-S_2\tau S_1-\frac{1}{8}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)=kD+ik(gA)$$

である．一方

$$\lambda\gamma P_1\times P_2=\begin{pmatrix}\gamma Y_1\\ -\gamma X_1\\ \eta_1\\ -\xi_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}X_2\\ Y_2\\ \xi_2\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

$$
=\Phi\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\gamma Y_1\vee Y_2-X_2\vee\gamma X_1) \\ \frac{1}{4}(2\gamma X_1\times Y_2+\eta_1X_2+\xi_2\gamma Y_1) \\ \frac{1}{4}(2\gamma Y_1\times X_2+\xi_1 Y_2+\eta_2\gamma X_1) \\ \frac{1}{8}((\gamma Y_1,\ Y_2)-(X_2,\ \gamma X_1)-3(\eta_1\eta_2-\xi_2\xi_1)) \end{pmatrix}
$$

であるから

$$
\lambda\gamma P_1\times P_2-\lambda\gamma P_2\times P_1
$$

$$
=\Phi\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-X_1\vee\gamma X_2+X_2\vee\gamma X_1-\gamma Y_1\vee Y_2+\gamma Y_2\vee Y_1) \\ \frac{1}{4}(2\gamma X_1\times Y_2-2\gamma X_2\times Y_1+\eta_1 X_2-\eta_2 X_1+\xi_2\gamma Y_1-\xi_1\gamma Y_2) \\ \frac{1}{4}(2X_2\times\gamma Y_1-2X_1\times\gamma Y_2+\eta_2\gamma X_1-\eta_1\gamma X_2+\xi_1 Y_2-\xi_2 Y_1) \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\Phi\Big(\frac{1}{4}\varphi_*D,\frac{1}{4}A,\ -\frac{1}{4}\gamma A,0\Big)\ \text{(補題5.23)}
$$

$$
=\frac{1}{4}\varphi_*(kD+ik(gA))
$$

$$
=\frac{1}{4}\varphi_*\Big(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1-\frac{1}{8}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)E\Big)
$$

となる．

定理5.25　Lie 群 $(E_8)^{\tilde\lambda\gamma}$ の Lie 環 $(\mathfrak{e}_8)^{\lambda\gamma}$ は

$$
(\mathfrak{e}_8)^{\tilde\lambda\gamma}=\{\,\Theta\in\Theta(\mathfrak{e}_8{}^C)\mid\tilde\lambda\gamma\Theta=\Theta\tilde\lambda\gamma\}
$$

$$
=\{\,\Theta(\Phi,\lambda\gamma Q,\ Q,0,s,\ -s)\mid\Phi\in(\mathfrak{e}_7)^{\lambda\gamma},\ Q\in(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma},\ s\in\boldsymbol{R}\}
$$

であり，$(\mathfrak{e}_8)^{\tilde\lambda\gamma}$ は Lie 環 $\mathfrak{so}(16)$ に写像 $\zeta:\mathfrak{so}(16)\to(\mathfrak{e}_8)^{\tilde\lambda\gamma}$,

$$
\zeta(l(D)+l(S)I+l(icE))=\Theta(\varphi_*D,2\lambda\gamma\chi^{-1}S,2\chi^{-1}S,0,2c,\ -2c)
$$

$(D\in\mathfrak{su}(8),\ \ S\in\mathfrak{S}(8,C),\ \ c\in\boldsymbol{R},\ \ \varphi_*:\mathfrak{su}(8)\to(\mathfrak{e}_7)^{\lambda\gamma},\ \ \chi:(\mathfrak{P}^C)_{\tau\gamma}\to\mathfrak{S}(8,C))$ により同型である．

証明　定理の前半は容易である（定理5.1参照）．ζ が全単射であることは明らかであるから，ζ が Lie 積を保つことを示そう．

(1)　$\zeta[l(D_1),\ l(D_2)]=\zeta l[D_1,\ D_2]$

$$
=\Theta(\varphi_*[D_1,\ D_2],0,0,0,0,0)=\Theta([\varphi_*D_1,\ \varphi_*D_2],0,0,0,0,0)
$$

$$=[\Theta(\varphi_* D_1, 0, 0, 0, 0, 0), \Theta(\varphi_* D_2, 0, 0, 0, 0, 0)]$$
$$=[\zeta l(D_1), \zeta l(D_2)].$$

(2) $\zeta[l(D), l(S)I]=\zeta(l(DS-S\tau D)I)=\zeta(l(DS+S^t D)I)$
$$=\Theta(0, 2\lambda\gamma\chi^{-1}(DS+S^t D), 2\chi^{-1}(DS+S^t D), 0, 0, 0)$$
となる．一方
$$[\zeta l(D), \zeta(l(S)I)]$$
$$=[\Theta(\varphi_* D, 0, 0, 0, 0, 0), \Theta(0, 2\lambda\gamma\chi^{-1}S, 2\chi^{-1}S, 0, 0, 0)]$$
$$=\Theta(0, 2(\varphi_* D)\lambda\gamma\chi^{-1}S, 2(\varphi_* D)\chi^{-1}S, 0, 0, 0)$$
となるが $(\varphi_* D)\lambda\gamma=\lambda\gamma(\varphi_* D)$，$(\varphi_* D)\chi^{-1}S=\chi^{-1}(DS+S^t D)$ であるから，両者は一致する．

(3) $\zeta[l(D), l(icE)]=\zeta l[D, icE]=\zeta 0=0$
$$=[\Theta(\varphi_* D, 0, 0, 0, 0, 0), \Theta(0, 0, 0, 0, 2c, -2c)]=[\zeta l(D), \zeta l(icE)].$$

(4) $\zeta[l(S_1)I, l(S_2)I]=\zeta l(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)$
$$=\zeta\Big(l\Big(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1-\frac{1}{8}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)E\Big)$$
$$+l\Big(\frac{1}{8}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)E\Big)\Big)$$
$$=\Theta\Big(\varphi_*\Big(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1-\frac{1}{8}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)E\Big), 0, 0, 0,$$
$$-\frac{i}{4}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1), \frac{i}{4}\mathrm{tr}(S_1\tau S_2-S_2\tau S_1)\Big)$$
$$=\Theta(4(\lambda\gamma\chi^{-1}S_1\times\chi^{-1}S_2-\lambda\gamma\chi^{-1}S_2\times\chi^{-1}S_1), 0, 0, 0,$$
$$\{\chi^{-1}S_1, \chi^{-1}S_2\}, -\{\chi^{-1}S_1, \chi^{-1}S_2\})$$ (補題5.24)

である．一方
$$[\zeta l(S_1)I, \zeta(l(S_2)I]$$
$$=[\Theta(0, 2\lambda\gamma\chi^{-1}S_1, 2\chi^{-1}S_1, 0, 0, 0), \Theta(0, 2\lambda\gamma\chi^{-1}S_2, 2\chi^{-1}S_2, 0, 0, 0)]$$
$$=\Theta(2\lambda\gamma\chi^{-1}S_1\times 2\chi^{-1}S_2-2\lambda\gamma\chi^{-1}S_2\times 2\chi^{-1}S_1, 0, 0,$$
$$\frac{1}{8}(-\{2\lambda\gamma\chi^{-1}S_1, 2\chi^{-1}S_2\}+\{2\lambda\gamma\chi^{-1}S_2, 2\chi^{-1}S_1\}),$$
$$\frac{1}{4}\{2\lambda\gamma\chi^{-1}S_1, 2\lambda\gamma\chi^{-1}S_2\}, -\frac{1}{4}\{2\chi^{-1}S_1, 2\chi^{-1}S_2\})$$
となり，これは上記に一致する．

(5) $\zeta[l(icE), l(S)I]=\zeta(2l(icS)I)$
$$=\Theta(0, 4\lambda\gamma\chi^{-1}(icS), 4\chi^{-1}(icS), 0, 0, 0)$$
$$=\Theta(0, 4\chi^{-1}(cS), -4\lambda\gamma\chi^{-1}(cS), 0, 0, 0)$$ (補題5.24)

$$=[\Theta(0,0,0,0,2c,-2c),\ \Theta(0,2\lambda\gamma\chi^{-1}S,2\chi^{-1}S,0,0,0)]$$
$$=[\zeta l(icE),\ \zeta(l(S)I)].$$

(6)　$\zeta[l(ic_1E),\ l(ic_2E)]=\zeta l[ic_1E,\ ic_2E]=\zeta 0=0$
$$=[\Theta(0,0,0,0,2c_1,-2c_1),\ \Theta(0,0,0,0,2c_2,-2c_2)]$$
$$=[\zeta l(ic_1E),\ \zeta l(ic_2E)].$$

以上で定理が証明された．

$(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ は単連結 Lie 群 E_8 の対合自己同型写像 $\tilde{\lambda}\gamma$ の不動点部分群として連結である．よって定理5.25より，$(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ は

$$Spin(16),\quad SO(16),\quad Ss(16),\quad SO(16)/Z_2$$

のいずれか 1 つに同型である．実は $(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}\cong Ss(16)$ となるのであるが，以下その証明の概略を述べよう．

Lie 環 $\mathfrak{e}_{8(8)}=(\mathfrak{e}_8{}^C)_{\tau\gamma}=\{R\in\mathfrak{e}_8{}^C\mid \tau\gamma R=R\}$ を用いる (E_8, **11** 参照)．さて，$\mathfrak{e}_8{}^C$ の $\tilde{\lambda}\gamma$ による固有空間分解

$$\mathfrak{e}_8{}^C=(\mathfrak{e}_8{}^C)^{\tilde{\lambda}\gamma}\oplus(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma},$$
$$(\mathfrak{e}_8{}^C)^{\tilde{\lambda}\gamma}=\{\Theta\in\mathrm{Der}(\mathfrak{e}_8{}^C)\mid\tilde{\lambda}\gamma\Theta=\Theta\tilde{\lambda}\gamma\}$$
$$\cong\{R\in\mathfrak{e}_8{}^C\mid\tilde{\lambda}\gamma R=R\}=(\mathfrak{e}_8{}^C)_{\tilde{\lambda}\gamma},$$
$$(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}=\{\Theta\in\mathrm{Der}(\mathfrak{e}_8{}^C)\mid\tilde{\lambda}\gamma\Theta=-\Theta\tilde{\lambda}\gamma\}$$
$$\cong\{R\in\mathfrak{e}_8{}^C\mid\tilde{\lambda}\gamma R=-R\}=(\mathfrak{e}_8{}^C)_{-\tilde{\lambda}\gamma}$$

を考える．

$$((\mathfrak{e}_8{}^C)_{\tilde{\lambda}\gamma})_{\tau\tilde{\lambda}}=((\mathfrak{e}_8{}^C)_{\tau\gamma})_{\tilde{\lambda}\gamma}=(\mathfrak{e}_{8(8)})_{\tilde{\lambda}\gamma},$$
$$((\mathfrak{e}_8{}^C)_{-\tilde{\lambda}\gamma})_{\tau\tilde{\lambda}}=((\mathfrak{e}_8{}^C)_{\tau\gamma})_{-\tilde{\lambda}\gamma}=(\mathfrak{e}_{8(8)})_{-\tilde{\lambda}\gamma}$$

であるから，$\mathfrak{e}_{8(8)}$ の分解

$$\mathfrak{e}_{8(8)}=(\mathfrak{e}_{8(8)})_{\tilde{\lambda}\gamma}\oplus(\mathfrak{e}_{8(8)})_{-\tilde{\lambda}\gamma}$$

を得る．$(\mathfrak{e}_{8(8)})_{\tilde{\lambda}\gamma}\cong\mathfrak{so}(16)$ である (定理5.25) から，これは $\mathfrak{e}_{8(8)}$ の Cartan 分解である．$[(\mathfrak{e}_{8(8)})_{\tilde{\lambda}\gamma},(\mathfrak{e}_{8(8)})_{-\tilde{\lambda}\gamma}]\subset(\mathfrak{e}_{8(8)})_{-\tilde{\lambda}\gamma}$ であるから，$(\mathfrak{e}_{8(8)})_{\tilde{\lambda}\gamma}$ の $(\mathfrak{e}_{8(8)})_{-\tilde{\lambda}\gamma}$ への表現 ψ：

$$\psi(R)R_1=[R,R_1],\qquad R\in(\mathfrak{e}_{8(8)})_{\tilde{\lambda}\gamma},\ \ R_1\in(\mathfrak{e}_{8(8)})_{-\tilde{\lambda}\gamma}$$

を得るが，この表現は既約である (例えば，M. Goto-F.D. Grosshans, Semi-simple Lie algebras, Dekker, 1978, (8.5.1))．さらに，$(\mathfrak{e}_{8(8)})_{\tilde{\lambda}\gamma}$ は単純であるから，ψ の $((\mathfrak{e}_{8(8)})_{-\tilde{\lambda}\gamma})^C=(\mathfrak{e}_8{}^C)_{-\tilde{\lambda}\gamma}$ への複素化表現 ψ^C も既約である (上記の (8.8.3))．以上のことから次の補題を得る．

補題5.26　群 $(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ の $(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}$ への表現は既約である．

命題5.27　群 $(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ の中心 $z((E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma})$ は位数 2 の群である：

$$z((E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma})=\{1,\ \tilde{\lambda}\gamma\}.$$

証明　明らかに $\{1, \tilde{\lambda}\gamma\}\subset z((E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma})$ である．逆に $\alpha\in z((E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma})$ とする．$(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ の $(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}$ の表現が既約である（補題5.26）から，群論の Schur の補題を用いると，α の $(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}$ の作用は定数写像である．すなわち，$\kappa\in C$ が存在して

$$\alpha R=\kappa R, \qquad R\in(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}$$

となる．α は Killing 形式 $B_8(R, R')$ を不変にする：$B_8(\alpha R, \alpha R')=B_8(R, R')$ から，

$$\kappa^2 B_8(R, R')=B_8(\alpha R, \alpha R')=B_8(R, R'), \qquad R, R'\in(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}$$

より，$\kappa^2=1$ を得る．$(\mathfrak{e}_8{}^C)^{\tilde{\lambda}\gamma}\cong\mathfrak{so}(16, C)$（定理5.25）は単純であるから，$(\mathfrak{e}_8{}^C)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ は $(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}$ で生成される：

$$(\mathfrak{e}_8{}^C)^{\tilde{\lambda}\gamma}=\{\sum_{i,j}[R_i, R_j]\mid R_i, R_j\in(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}\}$$

よって α は $(\mathfrak{e}_8{}^C)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ 上では $\kappa^2 1=1$，すなわち恒等写像である．$\kappa=1$ のとき，$\alpha=1$ であり，$\kappa=-1$ のとき $\alpha=\tilde{\lambda}\gamma$ である．以上で命題が証明された．

命題5.27より，$(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ は

$$SO(16),\quad Ss(16)$$

のいずれか 1 つに同型であることが分かった．

Lie 環 $\mathfrak{so}(16)$ の複素既約表現で次元が128であるものは同値を除いて 2 つしか存在しない．実際，Weyl の次元公式（上記(7.5.9)）を用いて dominant weight の次元を計算すると

ω_1	$2\omega_1$	ω_2	$2\omega_2$	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	$\cdots$
16	135	120	5304	560	1820	4368	8008	128	128	$\cdots$

となるから，128次元になるのは ω_7, ω_8 のみである．(ここに $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_8$ は基本 weight である)．一方，$Spin(16)$ はスピノル表現と呼ばれる 2 つの複素既約表現 $\Delta_{16}{}^+$，$\Delta_{16}{}^-$ をもっている（[2]命題4.68）．しかもこれら $\Delta_{16}{}^+$，$\Delta_{16}{}^-$ は共に $SO(16)$ の表現でない（[2]補題4.46）．さて $(E_6)^{\tilde{\lambda}\gamma}$ は128次元複素既

約表現$(\mathfrak{e}_8{}^C)^{-\tilde{\lambda}\gamma}$をもっていた(補題5.26)．よって$(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$は$SO(16)$ではない．したがって$(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma}$は$Ss(16)$でなければならない．かくして次の定理を得たことになる．

定理5.28　　$(E_8)^{\tilde{\lambda}\gamma} \cong Ss(16)$.

9　$\boldsymbol{E_8}$ の中心 $\boldsymbol{z(E_8)}$

定理5.29　群 E_8 の中心 $z(E_8)$ は 1 のみからなる：$z(E_8)=\{1\}$.

証明　$\alpha \in z(E_8)$ とする．$\upsilon\alpha = \alpha\upsilon$ より $\alpha \in \varphi(SU(2)\times E_7) \cong (SU(2)\times E_7)/\boldsymbol{Z}_2$ であり (定理5.21)，さらに $\alpha \in z(\varphi(SU(2)\times E_7))$ である．よって，定理4.15 より

$$\alpha = \varphi(E, 1) = 1 \quad \text{または} \quad \alpha = \varphi(E, -1) = \upsilon$$

となる．しかるに $\upsilon \notin z(E_8)$ である（定理5.21）であるから，$\alpha = 1$ である．

10　$\mathfrak{e}_8{}^C$ の root 系

定理5.30　C-Lie 環 $\mathfrak{e}_8{}^C$ の階数は 8 である．$\mathfrak{e}_8{}^C$ の（ある Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に関する）root 系は

$$\pm(\lambda_k - \lambda_l),\ \pm(\lambda_k + \lambda_l), \qquad 0 \leqq k < l \leqq 3,$$

$$\pm\lambda_k \pm \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3), \qquad 0 \leqq k \leqq 3,$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \pm \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \pm \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1),$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \pm \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \pm \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \pm \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \pm \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \pm \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \pm \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2),$$

$$\pm\left(\mu_j + \frac{2}{3}\nu\right), \qquad 1 \leqq j \leqq 3,$$

$$\pm\lambda_k \pm \left(\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{2}{3}\nu\right), \qquad 0 \leqq k \leqq 3,$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu\right),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu\right),$$

$$\pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu\right),\quad \pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu\right),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu\right),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu\right),$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu\right),\quad \pm\frac{1}{2}(-\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu\right),$$

$$\pm\left(\mu_j-\frac{1}{3}\nu+r\right),\qquad 1\leqq j\leqq 3$$

$$\pm\lambda_k\pm\left(\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,\qquad 0\leqq k\leqq 3$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\pm\left(\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu\right)\pm r,$$

$$\pm 2r,$$

$$\pm\nu\pm r$$

$(\mu_1+\mu_2+\mu_3=0)$ である．

証明　$\mathfrak{h}_7$ を定理4.43にある $\mathfrak{e}_7{}^C$ の Cartan 部分環とするとき

$$\mathfrak{h}=\{h=(\Phi(h),0,0,r,0,0)\,|\,\Phi(h)\in\mathfrak{h}_7,\ r\in C\}$$

は $\mathfrak{e}_8{}^C$ の可換な部分 Lie 環である（さらに $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{e}_8{}^C$ の Cartan 部分環になるものである）．

I　$\mathfrak{e}_7{}^C$ の root は $\mathfrak{e}_8{}^C$ の root である．実際，

$$[(\Phi(h), 0, 0, r, 0, 0), (\Phi, 0, 0, 0, 0, 0)] = ([\Phi(h), \Phi], 0, 0, 0, 0, 0)$$

となるからである.

II　$[(\Phi(h), 0, 0, r, 0, 0), (0, P, 0, 0, 0, 0)] = (0, (\Phi(h)+r)P, 0, 0, 0, 0)$.

であり，さらに定理4.43と同じ記号を用いて，

$$(\Phi(h_\delta + \widetilde{H}, 0, 0, \nu) + r)(X, Y, \xi, \eta)$$
$$= \left(\left(h_\delta + \widetilde{H} - \frac{1}{3}\nu + r\right)X, \left(h_\delta - \widetilde{H} + \frac{1}{3}\nu + r\right)Y, (\nu + r)\xi, (-\nu + r)\eta\right)$$

となる．$Y=0$，$\xi=\eta=0$ とし，さらに

$X = E_j$ として root $\mu_j - \dfrac{1}{3}\nu + r$,

$X = F_1(a)$, $a = e_k \pm ie_{4+k}$ として root $\pm\lambda_k - \dfrac{1}{2}\mu_1 - \dfrac{1}{3}\nu + r$

を得る．$X = F_2(a)$，$F_3(a)$ としても root を得る.

$X=0, \xi=\eta=0$ とし，さらに，$Y=E_j$，$Y=F_i(a)$ として root が求められる.

$X=Y=0$, $\xi=1$, $\eta=0$ として root $\nu+r$ を得る．同様に $-\nu+r$ も root である.

$$[\Phi(h), 0, 0, r, 0, 0), (0, 0, Q, 0, 0, 0)] = (0, 0, (\Phi(h)-r)Q, 0, 0, 0)$$

を用いても root を得る.

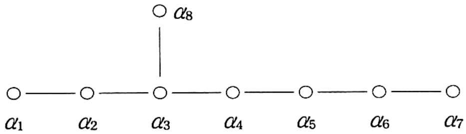
III　$[\Phi(h), 0, 0, r, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0)] = (0, 0, 0, 0, 2r, 0)$,
　　$[\Phi(h), 0, 0, r, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)] = (0, 0, 0, 0, 0, -2r)$

より $2r$，$-2r$ も root である.

定理5.31　$\mathfrak{e}_8{}^C$ の root 系（定理5.30）において

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + \frac{1}{2}(\mu_3 - \mu_1),$$
$$\alpha_2 = \mu_1 - \frac{1}{3}\nu - r, \quad \alpha_3 = 2r,$$
$$\alpha_4 = \mu_2 - \frac{1}{3}\nu - r, \quad \alpha_5 = \lambda_3 - \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3),$$
$$\alpha_6 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \alpha_7 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_8 = \nu - r$$

は基本 root 系であり，$\mathfrak{e}_8{}^C$ の Dynkin 図形は



となる.

証明　以下 root $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_8\alpha_8$ を略して $n_1n_2\cdots n_8$ で表すことにする.

$\lambda_0-\lambda_1=$	2	3	4	3	2	1	0	2	$\lambda_0+\lambda_1=$	2	4	6	5	4	3	2	3
$\lambda_0-\lambda_2=$	2	3	4	3	2	1	1	2	$\lambda_0+\lambda_2=$	2	4	6	5	4	3	1	3
$\lambda_0-\lambda_3=$	2	3	4	3	2	2	1	2	$\lambda_0+\lambda_3=$	2	4	6	5	4	2	1	3
$\lambda_1-\lambda_2=$	0	0	0	0	0	0	1	0	$\lambda_1+\lambda_2=$	0	1	2	2	2	2	1	1
$\lambda_1-\lambda_3=$	0	0	0	0	0	1	1	0	$\lambda_1+\lambda_3=$	0	1	2	2	2	1	1	1
$\lambda_2-\lambda_3=$	0	0	0	0	0	1	0	0	$\lambda_2+\lambda_3=$	0	1	2	2	2	1	0	1

$\lambda_0+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	2	4	6	5	3	2	1	3
$\lambda_1+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	1	2	2	1	1	1	1
$\lambda_2+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	1	2	2	1	1	0	1
$\lambda_3+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	1	2	2	1	0	0	1
$\lambda_0-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	2	3	4	3	3	2	1	2
$\lambda_1-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\lambda_2-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\lambda_3-\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)=$	0	0	0	0	1	0	0	0

$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=$	1	1	2	2	2	2	1	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=$	1	1	2	2	2	1	1	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=$	1	1	2	2	2	1	0	1

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=\ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=\ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=\ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_3-\mu_1)=\ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=\ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=\ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=\ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=\ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=\ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=\ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=\ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)=\ 1\ \ 2\ \ 4\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 2$$

$$\mu_1+\frac{2}{3}\nu=\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1$$

$$\mu_2+\frac{2}{3}\nu=\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1$$

$$-\mu_3-\frac{2}{3}\nu=\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0$$

$$\lambda_0+\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu=\ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 2$$

$$\lambda_0-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu=\ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 3$$

$$\lambda_1+\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu=\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0$$

$$\lambda_1-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu=\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1$$

$$\lambda_2+\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

$$\lambda_2-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$\lambda_3+\frac{1}{2}\mu_1-\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\lambda_3-\frac{1}{2}\mu_1+\frac{2}{3}\nu= \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2+\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2+\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2+\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2+\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3-\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3+\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3+\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3+\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3+\frac{2}{3}\nu= \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2$$

$\mu_1-\frac{1}{3}\nu+r=$	0	1	1	0	0	0	0	0
$\mu_2-\frac{1}{3}\nu+r=$	0	0	1	1	0	0	0	0
$-\mu_3+\frac{1}{3}\nu+r=$	0	1	2	1	0	0	0	1
$\mu_1-\frac{1}{3}\nu-r=$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\mu_2-\frac{1}{3}\nu-r=$	0	0	0	1	0	0	0	0
$-\mu_3+\frac{1}{3}\nu-r=$	0	1	1	1	0	0	0	1
$\lambda_0+\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu+r=$	2	4	6	4	3	2	1	3
$\lambda_0+\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu-r=$	2	4	5	4	3	2	1	3
$\lambda_0-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{3}\nu+r=$	2	3	5	4	3	2	1	2
$\lambda_0-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{3}\nu-r=$	2	3	4	4	3	2	1	2
$\lambda_1+\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu+r=$	0	1	2	1	1	1	1	1
$\lambda_1+\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu-r=$	0	1	1	1	1	1	1	1
$\lambda_1-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{3}\nu+r=$	0	0	1	1	1	1	1	0
$\lambda_1-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{3}\nu-r=$	0	0	0	1	1	1	1	0
$\lambda_2+\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu+r=$	0	1	2	1	1	1	0	1
$\lambda_2+\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu-r=$	0	1	1	1	1	1	0	1
$\lambda_2-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{3}\nu+r=$	0	0	1	1	1	1	0	0
$\lambda_2-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{3}\nu-r=$	0	0	0	1	1	1	0	0
$\lambda_3+\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu+r=$	0	1	2	1	1	0	0	1
$\lambda_3+\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{3}\nu-r=$	0	1	1	1	1	0	0	1

$\lambda_3-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{3}\nu+r=$	0	0	1	1	1	0	0	0
$\lambda_3-\frac{1}{2}\mu_1-\frac{1}{3}\nu-r=$	0	0	0	1	1	0	0	0
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu+r=$	1	2	4	3	2	2	1	2
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu-r=$	1	2	3	3	2	2	1	2
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2-\frac{1}{3}\nu+r=$	1	2	3	2	2	2	1	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2-\frac{1}{3}\nu-r=$	1	2	2	2	2	2	1	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu+r=$	1	2	4	3	2	1	1	2
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu-r=$	1	2	3	3	2	1	1	2
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2-\frac{1}{3}\nu+r=$	1	2	3	2	2	1	1	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2-\frac{1}{3}\nu-r=$	1	2	2	2	2	1	1	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu+r=$	1	2	4	3	2	1	0	2
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu-r=$	1	2	3	3	2	1	0	2
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2-\frac{1}{3}\nu+r=$	1	2	3	2	2	1	0	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2-\frac{1}{3}\nu-r=$	1	2	2	2	2	1	0	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu+r=$	1	1	2	1	0	0	0	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{3}\nu-r=$	1	1	1	1	0	0	0	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2-\frac{1}{3}\nu+r=$	1	1	1	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_2-\frac{1}{3}\nu-r=$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu+r=$	1	1	2	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu-r=$	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu+r= 1\ 2\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu-r= 1\ 2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu+r= 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu-r= 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu+r= 1\ 2\ 3\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu-r= 1\ 2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu+r= 1\ 2\ 4\ 3\ 3\ 2\ 1\ 2$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu-r= 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 2\ 1\ 2$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu+r= 1\ 3\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu-r= 1\ 3\ 4\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu+r= 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)+\frac{1}{2}\mu_3+\frac{1}{3}\nu-r= 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu+r= 1\ 2\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1$$
$$\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)-\frac{1}{2}\mu_3-\frac{1}{3}\nu-r= 1\ 2\ 2\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1$$
$$\nu-r= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$$
$$2r= 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$
$$\nu+r= 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$$

と表せるから $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ は基本 root 系である．$h=(\Phi(h), 0, 0, r, 0, 0)$，$h'=(\Phi(h'), 0, 0, r', 0, 0)\in\mathfrak{h}$，$\Big(\Phi(h)=\Phi\Big(\sum_{k=0}^{3}\lambda_k H_k+\sum_{j=1}^{3}\mu_j\widetilde{E}_j, 0, 0, \nu\Big)$，$\Phi(h')=\Phi\Big(\sum_{k=0}^{3}\lambda_k' H_k+\sum_{j=1}^{3}\mu_j'\widetilde{E}_j, 0, 0, \nu'\Big)\Big)$ に対して

$$B_8(h, h')=\frac{5}{3}B_7(\Phi(h), \Phi(h'))+120rr' \quad (\text{定理}5.4)$$

$$=\frac{5}{3}6\left(6\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k'+3\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mu_j'+4\nu\nu'\right)+120rr' \text{（定理4.44）}$$

$$=60\sum_{k=0}^{3}\lambda_k\lambda_k'+30\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mu_j'+40\nu\nu'+120rr'$$

となる．これより，root $\alpha_1, \cdots, \alpha_8$ に対応する元 $H_{\alpha_1}, \cdots, H_{\alpha_8} \in \mathfrak{h}$ ($B_8(H_\alpha, H)=\alpha(H)$, $H \in \mathfrak{h}$) は

$$H_{\alpha_1}=\left(\Phi\left(\frac{1}{120}((H_0-H_1-H_2-H_3)+2(\tilde{E}_3-\tilde{E}_1)), 0, 0, 0\right), 0, 0, 0, 0, 0\right),$$

$$H_{\alpha_2}=\left(\Phi\left(\frac{1}{90}(2\tilde{E}_1-\tilde{E}_2-\tilde{E}_3), 0, 0, -\frac{1}{120}\right), 0, 0, -\frac{1}{120}, 0, 0\right),$$

$$H_{\alpha_3}=\left(0, 0, 0, \frac{1}{60}, 0, 0\right),$$

$$H_{\alpha_4}=\left(\Phi\left(\frac{1}{90}(-\tilde{E}_1+2\tilde{E}_2-\tilde{E}_3), 0, 0, -\frac{1}{120}\right), 0, 0, -\frac{1}{120}, 0, 0\right),$$

$$H_{\alpha_5}=\left(\Phi\left(\frac{1}{60}(H_3-(\tilde{E}_2-\tilde{E}_3)), 0, 0, 0, \right), 0, 0, 0, 0, 0\right),$$

$$H_{\alpha_6}=\left(\Phi\left(\frac{1}{60}(H_2-H_3), 0, 0, 0\right), 0, 0, 0, 0, 0\right),$$

$$H_{\alpha_7}=\left(\Phi\left(\frac{1}{60}(H_1-H_2), 0, 0, 0\right), 0, 0, 0, 0, 0\right),$$

$$H_{\alpha_8}=\left(\Phi\left(0, 0, 0, \frac{1}{40}\right), 0, 0, -\frac{1}{120}, 0, 0\right)$$

となる．よって

$$(\alpha_1, \alpha_1)=B_8(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_1})=60\frac{1}{120}\frac{1}{120}4+30\frac{1}{120}\frac{1}{120}8=\frac{1}{30}$$

となる．同様にして

$$(\alpha_i, \alpha_i)=\frac{1}{30}, \quad i=2, 3, \cdots, 8,$$

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1})=-\frac{1}{60}, \quad i=1, 2, \cdots, 6, \quad (\alpha_3, \alpha_8)=-\frac{1}{60},$$

$$(\alpha_i, \alpha_j)=0, \text{　その他}$$

となる．これより容易に Dynkin 図形を描くことができる．

付録11　非 compact $\boldsymbol{E}_8$ 型線型 Lie 群 $\boldsymbol{E}_{8(8)}$, $\boldsymbol{E}_{8(-24)}$

$$\mathfrak{e}_{8(-24)}=\mathfrak{e}_{7(-25)}\oplus\mathfrak{P}\oplus\mathfrak{P}\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}, \quad (\mathfrak{e}_{7(-25)}=(\mathfrak{e}_7{}^C)_\tau),$$

$$\mathfrak{e}_{8(8)}=\mathfrak{e}_{7(7)}\oplus\mathfrak{P}'\oplus\mathfrak{P}'\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}, \quad (\mathfrak{e}_{7(7)}=(\mathfrak{e}_7{}^C)_{\tau\gamma})$$

とおき, Lie 積 $[R_1, R_2]$ を $\mathfrak{e}_8{}^C$ と同様に定義して Lie 環の構造をいれておく．
さて，群 $E_{8(8)}$, $E_{8(-24)}$ を

$$E_{8(8)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{e}_{8(8)})\,|\,\alpha[R_1, R_2]=[\alpha R_1, \alpha R_2]\},$$
$$E_{8(-24)}=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{e}_{8(-24)})\,|\,\alpha[R_1, R_2]=[\alpha R_1, \alpha R_2]\}$$

で定義する．これらの群は

$$E_{8(8)}=(E_8{}^C)^{\tau\gamma},\quad E_{8(-24)}=(E_8{}^C)^{\tau}$$

と定義してもよい．

定理5.32　Lie 群 $E_{8(8)}$, $E_{8(-24)}$ の極分解はそれぞれ

$$E_{8(8)}\simeq Ss(16)\times \boldsymbol{R}^{128},$$
$$E_{8(-24)}\simeq(SU(2)\times E_7)/\boldsymbol{Z}_2\times \boldsymbol{R}^{112}$$

で与えられる．

証明　それぞれ定理5.28，定理5.21に対応する事実である．

定理5.33　中心 $z(E_{8(8)})$, $z(E_{8(-24)})$ は 1 のみよりなる．

あとがき

この「例外型単純リー群」の原稿を書いていますと，さまざまな感慨があり，またいろいろのことが思い出されます．思い出といっても殆んどが産む苦しみの辛いことばかりですが，それは日が経つにつれて良い思い出となって残ってくれるでしょう．そこで，以下，私と例外群との係わりについて書いてみようと思います．

私が例外群に係わった原点は，40年程前に

［4］ H. Freudenthal, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Math, Inst. Rijksuniv. to Utrecht, 1951

を読んだことにあり，すべてここから始まっています．まだ十分読み切っていない所もありますが，私の愛読書になりました．ここには Lie 環 $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$ と群 $E_{6(-26)}$ について書かれています．群 F_4 とその部分群 $Spin(8)$, $Spin(9)$ については

［5］ Y. Matsushima, Some remarks on the exceptional Lie group F_4, Nagoya Math. J. 4 (1954)

があります．当時，私はこれらの論文に私なりの証明をつけていました．それらの知識の1部をまとめたのが拙書「群と表現」［2］の第5章です．私には Freudenthal［4］にある3対原理の証明が理解できず，また（群 F_4 の連結性を用いずに）F_4 が $\mathfrak{J}$ の trace を不変にする（補題2.2）の証明に苦労しました．そこで3対原理は「群と表現」［2］にあるように証明を与えましたが，本書では変えてあります．しかし，split Cayley 代数 $\mathfrak{C}'$ での3対原理は［2］の証明は通用しますが，本書のは通用しません．（したがって改悪になっている意味もあります）．trace 不変の証明は，［2］のは長くてしかも compact 群 F_4 にしか通用しません．しかし本書の証明は非 compact F_4 群にも通用します．（これは［2］のより改良になっています）．

今から15年程前，台湾の淡江文理学院へ客員教授で1年間行かせて頂きました．自由な時間が十分に有り過ぎましたので，非 compact 例外群の極分解を具体的に与えようと思い立ち，群 $G_{2(2)}$ から始めることにしました．当初，$G_{2(2)}$ の極大 compact 群が $SO(4)$ である（定理1.50）ことの行列表示による証明を与えましたが，群 $F_{4(4)}$ の極分解を考えているとき，$G_{2(2)}$ を振り返ってみ

て, 写像 $\varphi : Sp(1)\times Sp(1) \to G_2$, $\varphi(p,q)(m+ae) = qm\overline{q} + (pa\overline{q})e$ (定理1.13) に気付いたのです. 台中の日月潭に観光に行くために, 台北駅構内のベンチに家内と一緒に汽車待ちのため坐っていた時のことです. 群 F_4, E_6 の部分群 $(Sp(1)\times Sp(3))/\boldsymbol{Z}_2$, $(Sp(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2$ を定義するための写像 φ(定理2.27, 定理3.21) は, この写像 φ の拡張になっていますので, この φ : $Sp(1)\times Sp(1)\to G_2$ が例外群解明の始まりとなっているといえます. (例外群の $Spin(n)$ 系統の部分群を見付けるのには別の考察が必要となりますが). 非 compact 単純 Lie 群を調べるとき, 私が重宝している split 複素数, split 四元数のつくる多元環 $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{H}'$ は, 群 $G_{2(2)}$ が部分群 $SL(3,\boldsymbol{R})$ をもつ(定理1.51) ことを証明したことから出発しています.

台湾から帰ってからしばらくして compact E_6 群の構成 : $E_6=\{\alpha\in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C)\,|\,\det \alpha X=\det X, \langle\alpha X,\alpha Y\rangle=\langle X,Y\rangle\}$ に気付きました. Cayley 射影平面 $\mathfrak{C}P_2$ の射影変換群が $E_{6(-26)}$ である ([4], このことを E. Cartan も知っていたということです) という事実をもとに, $E_{6(-26)}$ を compact 化して群 E_6 を構成するのが私の長年の夢でした. このために射影幾何学における非ユークリッド幾何学の類似を試みようとしたのですが失敗の連続でした. うまく行かないので射影幾何学から一旦離れて代数的に処理したのがよかったのかもしれません. (この辺の事情は古典型単純リー群[3]にも少し書きました). この compact 群 E_6 の連結性を示すために必要な $\mathfrak{J}^C$ の $(E_6)_0$ による対角化の補題 (命題3.7) と $E_6/F_4\simeq E\mathrm{IV}$ (定理3.8) の証明には ($\mathfrak{J}$ の $(F_4)_0$ による対角化の補題 (命題2.20) と $F_4/Spin(9)\simeq\mathfrak{C}P_2$ (定理2.21) の経験があったためか) 時間を要しませんでした. E_6 の中心 $z(E_6)\cong\boldsymbol{Z}_3$ (定理3.9) を求めてみて, E_6 の Dynkin 図形から中心を求めることより現実味があるような気がして, 群 E_6 に親しみを感じたものでした. E_6 の部分群 $(Sp(1)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2$, $(U(1)\times Spin(10))/\boldsymbol{Z}_4$, $Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2$ (定理3.21, 定理3.17, 定理3.24) を見付けるのにも苦労がありました. 特に $Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2$ を定義するための写像 g : $\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0{}^C$ を見付けるのには非常な苦労と長い日数を要しました. ある年の12月末のこと, 高知大学での位相幾何学シンポジュームに参加するため, 飛行機から四国の海岸線を見下ろしている時になぜか急に思いついたものです. 高知では酒を飲んで遊んでいましたが, 松本の自宅へ帰って計算するとうまく行っていて全く感動的でした. 私が今までに味わった感動のうち大きいものを 3 つ挙げよといわれれば (1) ユニタリ群 $U(n)$ の胞体分割 (群と位相[1]第 3 章), (2) compact 群 E_6 の構成, (3) 写像 g : $\mathfrak{J}^C\to\mathfrak{J}(4,\boldsymbol{H})_0{}^C$

の発見，を挙げたいと思います．

群 E_6 の対合自己同型写像による不動点部分群の決定の仕事の中で最後に残ったのが，(簡単な筈なのに)意外と $\alpha\in(E_6)^\sigma$ ならば $\alpha E_1=\xi E_1$ (補題3.11)でした．これが解決すれば E_6 がすべて完成するのだというわけで2週間余り一生懸命考えました．このような時には鉛筆を持って机に向っても役に立ちません．何を計算すればよいか分からないからです．起きていても寝ていても頭の中で何かが回っていて，昼も夜も区別がつかなくなります．この補題も夜中の夢うつつの中で得られたものです．(F_4 の定理2.23はこの後で得られたものです)．このような夢の中の産物は他にも数多くあります．

群 E_7，E_8 については当時（10年余前）大学院生であった今井孝夫君（現三菱電気コントロールソフトウェア株式会社）の協力は貴重でした．補題4.12の $\exp \Phi_i(a)$，定理4.14の $E_7/E_6\simeq\mathfrak{M}_1$ は今井君の計算結果です．また，群 E_8 の構成についても今井君といろいろと討議しました．今から思えば随分無駄な考察や計算もしていましたが，2人で話し合ったことを家に持ち帰って計算し，翌日答合せをして，もし結果が一致しない所があれば決って私の方が違っていました．群 E_7 の部分群 $Spin(12)$ (定理4.27) については，今井君の1年後輩の大学院生であった保倉理美君（現横浜市立大学）の協力を得ました．写像 κ は私が，写像 μ は保倉君が見付けたものです．$Spin(12)$ を定義するために，E_1 に関係するものは何であろうが徹底的に調べ上げようとした所産です．

群 E_7 の部分群 $SU(8)/\boldsymbol{Z}_2$（定理4.36）を定義するための写像 $\chi:\mathfrak{P}^C\to\mathfrak{S}(8, C)^C$ も見付けるのに苦労したものの1つです．信州大学の6階のゼミ室で出来上り，横から保倉君が覗き込んでいたのが思い出されます．話が前後しますが，群 G_2 の部分群 $SU(3)$ (定理1.3) について，「群と位相」[1]にあるものの別構成として $\mathfrak{C}=\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}^3$ を用いようと思いついたのが，東京から松本へ帰る列車の中です．また，G_2 の位数3の自己同型写像 w を見付けたのは随分古く，群 G_2 の胞体分割を考えていた時のことです．(この w に関して $(F_4)^w\cong(SU(3)\times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3$，$(E_6)^w\cong(SU(3)\times SU(3)\times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3$，$(E_7)^w\cong(SU(3)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3$ は分かりましたが，$(E_8)^w\cong(SU(3)\times E_6)/\boldsymbol{Z}_3$ の具体的な証明は未だに分かりません)．G_2 の胞体分割は未だにできないままでいますが，この w が今になって役立とうとは当時は思ってもいませんでした．

こうして振り返ってみますと，私の数学的思考の中でいつも不思議な現像が起っています．ある問題を考えている時，考えがある1点のまわりをぐる

ぐる回っていて，数週間，数ヶ月，時には数ヶ年間に亘って何ら進展が無かったものが或る時瞬時に分かることがあります．しかもその思いつく場所は決して机の前ではなくて，車中とか通学途中とか，または夢の中であって，全く偶然に生れるのです．すなわち思考の Catastrophy 現象です．私は，写像を構成したり見付けたりすることばかりやっていますので，特にそうなるのかもしれません．そして，その思いついた瞬間のことや，まわりの状態をはっきり記憶していますし，またその月日も覚えています．(しかし年号の記憶は確かではありません（調べれば分かりますが)).

今から 8 年程前になりますが，京都大学数理研で「リー群の表現論」のシンポジュームがありました．私も例外群のことで話をさせて頂きましたが，自分自身の話以外のすべての講演は私には理解できないものばかりでした．その難かしい講演を何とはなしに聞いているうちに，Berger の単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の対合自己同型写像 σ の分類とその不動点部分環 $\mathfrak{g}^{\sigma}$ の決定の仕事：

[6] M. Berger, Les espaces symētriques non compacts, Ann, Sci. Ecole Norm. Sup. 74 (1957)

を例外群で実現してみようと決心することになりました．この意味で，このシンポジュームへの出席は私にとって有意義であったといえます．今現在，例外群 G の対合自己同型写像 σ の実現とその不動点部分群 G^{σ} の決定は (E_8 型群には若干不満があるというものの)一応完成しました．この結果を次の論文にまとめました．

[7] I, Yokota, Realizations of involutive automorphisms σ and G^{σ} of exceptional linear Lie groups G, part I, $G=G_2$, F_4 and E_6, part II, $G=E_7$, part III, $G=E_8$, Tsukuba J. Math., 1990-1991.

これは例外群の総集編ともいえるものですから興味のある方は目を通して下さい．これを完成するのに 7 年かかったわけですが，これにもいろいろな苦労がありましたし，いろんな人からの協力も頂きました．群 G を複素化 G^C して考えていたのを中断していたのですが，これを元に戻す切っ掛けを作ってくれたのが宮坂隆君（現長野県伊那北高校）であり，E_6 型群の不動点部分群40個のうち，$SU(5,1)/\boldsymbol{Z}_2$ の 1 つだけが分からず 1 年以上苦しんだのを助けてくれたのが宿沢修君（現山梨大学）であり，また群 E_7 の 2 つの対合自己同型写像 ι と λ が共役であることを計算してくれたのが宮下敏一君（現長野県上田高校）でした．(以上の者は私のまわりにいます「例外群を愛する会」のメンバーの一員です)．数学は 9 割が分かっても 1 割が分からないために 0

に帰すことがあります．もし彼等の協力がなければ，私が今なお苦闘しているかもしれないと思うとたまらない気がします．この会の皆んなが今では私を数学以外でも励ましてくれている気がします．ともあれ有難いことだと感謝しています．

数学には「…でなければならない」と「…である」の2つの証明方法があるようです．背理法や消去法は前者の方法であり，直接法は後者の方法であるといえましょう．単純 Lie 群 G を調べるとき，root 系を用いるのは前者であり，本書のように写像を与えるのは後者の方法でしょう．私自身例外群（特に compact 例外群）を考えるとき，これは一般論から分かっている事実であると思うと，時には考える気力が無くなりそうになることもありましたが，兎に角頑張ってきました．数学を学ぶ者にはそれぞれの立場がありますので何ともいえませんが，本書のようなやり方もあると御理解いただけたらと思っています．そして心おきない御批判を頂きたいと思っております．

最後になりましたが，Lie 環 $\mathfrak{e}_7$，$\mathfrak{e}_8$ に関しては

[8] H. Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, I, II, VIII, IX, X, XI, Nedel. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57＝Indag. Math., 16 (1954), Ser. A. 62＝21 (1959), Ser. A. 66＝25

に依っています．これらの論文には Lie 環 $\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$ およびある種の幾何学について書かれています．どうして Freudenthal がこのような複雑な Lie 環 $\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$ の構成に気付くのか，私には不思議以外の何物でもありません．(Lie 環 $\mathfrak{e}_7$ は E. Cartan の構成法を改良したものだとききます)．私は，これらの真の意味が分からないままに，そこにある式や結果を使わせてもらっているに過ぎませんので，いくら計算して結果を出しても Freudenthal の掌中から抜け出ていないような気がしてなりません．私は彼の異常感覚ともいうべき驚くべき才能に，最大の敬意と最大の尊敬の念を払っています．Freudenthal 自身も群 E_7, E_8 を具体的に構成しようと努力していたとききます．一応私は私なりにその目的を達し，群 E_7, E_8 を調べてきましたので，この書を Freudenthal に棒げたい気がします．天才 Freudenthal に対して不遜になるかもしれませんが，私にはそういう気持ちでいます．(具体的にどうしてよいか分かりませんが)．

1990年8月24日　　横田一郎　記

著者紹介

横田一郎（よこた・いちろう）

著者略歴

1926年大阪府出身

大阪大学理学部数学科卒，大阪市立大学理学部数学科助手，講師，助教授，
信州大学理学部数学科教授を経て，退官，信州大学名誉教授．理学博士．

主　書　群と位相，群と表現（以上裳華房）
ベクトルと行列（共著），微分と積分（共著），
やさしい位相幾何学の話，例題が教える群論入門，一般数学（共著），
多様体とモース理論，線型代数セミナー（共著），古典型単純リー群
（以上 現代数学社）

例外型単純リー群

2013年 1月24日　　新版第1刷発行

著　者　　横田一郎
発行者　　富田　淳
発行所　　株式会社　現代数学社
〒606-8425 京都市左京区鹿ヶ谷西寺ノ前町1
TEL&FAX 075 (751) 0727　振替 01010-8-11144
http://www.gensu.co.jp/

印　刷　　牟禮印刷株式会社

ISBN978-4-7687-0404-2